SAVEZ DRUŠTAVA MATEMATIČARA I FIZIČARA FNRJ

MATEMATIČKO FIZIČKI LIST

ZA UČENIKE SREDNJIH ŠKOLA

3

GODINA VI.
ZAGREB
1955 – 56

IZDAJE DRUSTVO MATEMATIČARA I FIZIČARA NRH

»MATEMATIČKO-FIZIČKI LIST za učenike srednjih škola« izlazi u 4 broja po 40 stranica. Za vrijeme ferija list ne izlazi.
Pretplata za 4 broja iznosi Din 200. — Pojedini će se broj prodavati po Din 60. — Pretplatu i narudžbe slati na adresu: »MATEMATIČKO-FIZIČKI LIST«, Zagreb, 16/III., pošt. pretinac 165 ili na čekovni račun broj 40-T-1080. — Pretplata se može slati i poštanskom uplatnicom.

SADRŽAJ

	Strana
Rauter A., Jurij Vega	81
Srdoč D., Geiger-Muellerov brojač	84
Rajčić L., O tangencijalnom četverokutu s pripisanom kružnicom	87
Blanuša D., O neeuklidskim geometrijama	89
Winterhalter D., Fotografija u nuklearnoj fizici	93
Šindler G., O atomskoj jezgri	95
Devidé V., O jednoj mogućnosti pogrešnog zaključivanja	99
Prvanović S., Jedna teorema Eulera i jedna njena primjena	103
Zanimljivosti i razno: Proba pomoću 9. — Iz života velikih ljudi. — Konstrukcija poligona. — O jednoj teoremi matematičkih sredina. — Pripombe k notici Prvanovića. — Antiproton. — Čerenkovljevo zračenje i primjena. — Tlak senjske bure	105
Zadaci i rješenja: A) Zadaci iz matematike. — B) Zadaci iz fizike. — C) Rješenja zadataka iz matematike. — D) Rješenja zadataka iz fizike	115
Vježbe iz matematike za učenike 5.—8. razreda gimnazije	125
Vježbe za 4. raz. gimnazija i 8. raz. osmog. škole	127
Ukrštene formule	128
Matematička križaljka	3. str. omota

Uređivački odbor:

AHLIN FRANC, profesor VPŠ, Ljubljana
BANDIĆ IVAN, profesor VPŠ, Beograd
HRABAK FRANJO, dir. II. gimn., Zagreb
JOVANOVIĆ PETAR, prof. VPŠ, Cetinje
LAZIĆ MARKO, direktor VPŠ, Mostar
NIKOLOVSKI TOME, profesor, Skopje
ŠINDLER GUSTAV, profesor, Zagreb

Glavni urednik:

KURELEC ALFRED, profesor VPŠ, Zagreb

Tehnički urednik:

ŠKREBLIN STJEPAN, h. prof. VPŠ, Zagreb

VLASNIK SAVEZ DRUŠTAVA MATEMATIČARA I FIZIČARA FNRJ
IZDAJE DRUŠTVO MATEMATIČARA I FIZIČARA NAR. REPUBLIKE HRVATSKE

Tisak Grafički zavod Hrvatske

MATEMATIČKO-FIZIČKI LIST

ZA UČENIKE SREDNJIH ŠKOLA

GODINA VI. BROJ 3 | ZAGREB | ŠKOL. GOD. 1955. — 1956.

Jurij Vega

ALEKSANDAR RAUTER, Maribor

Jurij Vega se je rodil 23. marca 1754 v vasi Zagorici pri Moravčah. Moravče so kakih 10 km oddaljene od Laz (Laze želez. postaja na progi Ljubljana-Zagreb). Oba kraja ležita severno. Vega je bil sin polgruntarja Jerneja Vehe im žene Helene. Ime Vega je bilo vpisano v rojstno knjigo kot Veha, Vecha, Wecha, Vehovez in še na mnoge druge različne načine. Čeprav je bil Vega slovenski matematik, ga avstrijske oblasti niso hotele priznati za Slovenca, ki bi si zaslužil plemstvo, v katerega je bil povišan *l.* 1796. Menili so, da je potomec španske plemiške rodbine Vega, katere član naj bi bil tudi znameniti španski pesnik in dramatik Lope de Vega in bi se najnekateri člani te rodovine preselili tudi v Slovenijo, takratno vojvodino Krajnsko. Da je Vega po narodnosti Slovenec, a ne Španec, se je Fr. Hauptmanu posrečilo dokazati s pomočjo proučevanja župnijskih rojstnih knjig v Moravčah, da so v vasi Zagorici živeli Slovenci, s priimkom Vehe.

Ker je bil Jurij Vega zelo nadarjen, so ga poslali v ljubljanske šole, ki so bile vse nemške in latinske. Na pomoč od doma ni mogel računati, ker so zato bili starši prerevni in mu je prezgodaj umrl oče. Josip Maffei je mu bil kot profesor matematike mentor, pa tudi materialno ga je podpiral. Vzpodbujal ga je obenem tudi k izpopolnjevanju matematičnega znanja. V poznejših letih mu je Vega posvetil 2. izdajo svojega logaritemsko trigonometričnega priročnika (malega logaritmovnika).

Po dovršenom odlično uspelem študiju 1775. na ljubljanskem liceju je bil Vega sprejet za navigacijskega inženirja. Napravil je tudi načrt Gruberjevega prekopa, ki naj bi izsuševal močvirje Ljubljansko barje. Vendar ni čutil pravega nagnjenja in veselja za ta poklic. Zato je prestopil v vojaško-artilerijsko službo. Izpremenil je svoj priimek. Prej se je pisal Vecha, sedaj pa Vega.

Po enem letu študija v artilerijski šoli je bil že povišan v podporočnika, pozneje pa za profesorja matematike topničarske šole.

Izdal je 3 zvezke matematičnih predavanj, ki niso bila samo matematično, temveč tudi pedagoško dovršena: Vorlesungen über die Mathematik.

Prvi zvezek vsebuje osnovne računske operacije s posebnimi števili in deloma algebro.

Drugi zvezek ima teoretično geometrijo, ravno in sferično trigonometrijo (geometrijo) in diferencialni ter integralni račun.

Tretji del pa je praktičnega značaja in obravnava mehaniko, deloma tudi balistiko. Saj je tudi dal natančna topničarska navodila za uporabo topniških tablic.

Kot matematik bi bil napravil lahko še mnogo več, da ga niso pri tem ovirale vojne takratne Avstrije s Turki in s Francozi. Kljub temu pa niti pred Beogradom, kjer je se vnel hud boj za Kalimegden ni prenehal misli niti na matematiko, niti na mehaniko. Že Leonhard Euler je skušal po splošnem gravitacijskem zakonu dognati,

kaj bi se zgodilo, če bi telo po zakonu težnosti priletelo neovirano v središče zemlje, ako je bila pri izpustitvi telesa začetna hitrost 0. Tolmačil je, da se po Keplerjevem zakonu mora poslužiti elipse, katere gorišče je središče zemlje. Ta pa degenerira v dvakrat šteto daljico. Zato se enostavno giblje po daljici do središča, okoli središča zavrti in se vrne. Vender Jurij Vega je računsko dokazal, da se ne vrne temveč leti naprej do iste razdelje, samo tolmačene kot antipodna točka prejšnje.

Vega kod vojak ni tako zaslovel, kakor pa kot pisac logaritmovnikov.

Že v 15. stoletju so nekateri matematiki zlasti pri osnovi 2 uvideli zvezo med aritmetično in geometrijsko vrsto. Predvsem jih je zanimala seveda osnova 2 ker je najmanjša celostevilčna osnova.

Aritmetična vrsta, ki je obojestransko neskončna se glasi:

$$\begin{array}{cccccccccccc} a_{-5}, & a_{-4}, & a_{-3}, & a_{-2}, & a_{-1}, & a_0, & a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & a_5 \\ a_0 - 5d, & a_0 - 4d, & a_0 - 3d, & a_0 - 2d, & a_0 - d, & a_0, & a_0 + d, & a_0 + 2d, & a_0 + 3d, & a_0 + 4d, & a_0 + 5d \\ b_{-5}^{1}, & b_{-4}^{1}, & b_{-3}^{1}, & b_{-2}^{1}, & b_{-1}^{1}, & b_0^{1}, & b_1^{1}, & b_2^{1}, & b_3^{1}, & b_4, & b_5 \\ b_0k^{-5}, & b_0k^{-4}, & b_0k^{-3}, & b_0k^{-2}, & b_0k^{-1}, & b_0^{1}, & b_0k, & b_0k^2, & b_0k^3, & b_0k^4, & b_0k^5. \end{array}$$

Tukaj sem obe zaporedji generaliziral (posplošil) ter razširil tudi na negativne argumente a_n in b_n, namesto s 1_{o} členom, sem vse izrazil z 0-tim členom.

Če logaritmiramo dobimo aritmetično zaporedje iz geometrijskega;

$\log b_0 - 5 \log k$, $\log b_0 - 4 \log k$, $\log b_0 - 3 \log k$ i t. d., ker eksponenti

$-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$ tvorijo aritmetično vrsto.

Prav tako če katerokoli osnovo potenciramo z aritmetično vrsto, dobimo geometrijsko vrsto.

Ta zveza že zadošča za logaritmiranje

$$\cdots \frac{1}{32}, \frac{1}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, 16, 32, \cdots$$

$$\cdots 2^{-5}, 2^{-4}, 2^{-3}, 2^{-2}, 2^{-1}, 2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5 \cdots$$

Argumenti logaritmov so tukaj v 1. vrsti logaritmi pa eksponenti osnove 2.

Logaritmiranje je 2. računska operacija, ki je obratna potenciranju. Prva je korenjenje (iskanje osnove), druga pa logaritmiranje (iskanje eksponenta).

Že Janez Kepler je spisal multiplikacijske tablice in jih uporabljal na osnovo 2. Te tablice so dandanes manj znane. Kot osnovne vrednosti so bili spisani eksponenti (logaritmi) na eni strani, na drugi strani pa vrednost števila (numerusa), ki določenemu eksponentu pripada. To pa je ravno obratni logaritmovniški princip. Dandanes so logaritmi notranje vrednosti na tablicah. Jošt Burghi je izdal logaritmovnik leta 1620. Vendar ga je že leta 1614 prehitel s popolnejšo izdajo John Napier. Vzel je kot osnovo namesto 2, ki nam pri celoštevilčnih eksponentih prehitro narašča, rajši osnovo $1 + \frac{1}{10^4}$ in pozneje še $1 + \frac{1}{10^7}$; Presledki so tu mnogo manjši, kot pri osnovi 2; Pri osnovi 2

Vrednost logaritma: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6

Vrednost numeruse: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64

Vrednost logaritma: 0, 1 2 3

Vrednost numerusa: 1, 1,0000001, 1,0000002 . . ., 1,0000003.

$$\left(1 + \frac{1}{10^7}\right)^1 = 1 + \frac{1}{10^7}; \quad \left(1 + \frac{1}{10^7}\right)^2 = 1 + \frac{2}{10^7} + \frac{1}{10^{14}}; \ldots.$$

Zaradi manjših presledkov lahko priredimo decimalnim številom celoštevilčne eksponente. Iz vrednosti numerusa dobim vrednost logaritmov. Če dvoje takih eksponentov seštejem, dobim logaritem produkta.

Vendar tudi Napierjeva osnova $1 + \frac{1}{10^7}$ ni ohranila svoje prvotne vrednosti, temveč so jo izpopolnili v tej obliki:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n} =$$
$$= 2{,}718281828459045\ldots$$

Za računanje logaritmov pa uporabljamo:

$$\ln z = (z-1) - \frac{(z-1)^2}{2} + \frac{(z-1)^3}{3} - \frac{(z-1)^4}{4} + \frac{(z-1)^5}{5} \cdots,$$

pri čemu mora biti $|z-1| < 1$, oziroma

$$\ln(z+1) = \ln z + 2\left[\frac{1}{2z} + \frac{1}{3(z+1)^3} + \frac{1}{5(z+1)^5} + \cdots\right],$$

kjer je z poljubno celo pozitivno število.

Logaritmi negativnih števil reelno so neizrazljivi niti na osnovo e, niti na osnovo 10.

Napier se vrst ni posluževal, temveč je za sestavo svojih tablic enostavno množil osnovo $1 + \frac{1}{10^7}$ s samo seboj, kakor je predvideval eksponent. Vendar je Jurij Vega že upošteval obstoj neskončnih vrst.

Holandec Andriaen Vlacq je pa že kot trgovec in spreten računar tudi 1628 sam izdal obsežen logaritmovnik Arithmetica logaritmica. Vendar, čeprav je bil zelo vestno sestavljen in je, obsegal že Briggsove logaritme (bilo jih je 100000, skrajšanih na 10 decimalk), vendar je bilo v njem mnogo napak, ki so zmanjševale njegovo vrednost. Kar se trigonometričnih funkcij tiče, ima tudi secans in cosecans. Skuša pa že uporabiti delitev po 100 gradov in 100 minut, namesto 90^0 in $60'$.

Vender vsi ti logaritmovniki, kakor tudi Vlacqov, so bili pomanjkljivi. Možne pa so tudi napake pri poznejših ponatisih.

Spomočjo neskončnih vrsta, ki se dado pri serijski uporabi računanja zelo poenostaviti, jer Vega računal s svojimi topničarji logaritme števil in logaritme trigonometričnih funkcij.

Za Briggsove logaritme velja:

$$\log z = \frac{\ln z}{\ln 10} = \frac{\ln z}{2{,}302\,585\ldots} = 0{,}434\,295\,\ln z.$$

Vegove logaritmovnike odlikuje izredno majhno število napak. Bistvenih je kakih 5, nebistvenih (zaokrožitvenih napak na 10. decimalnem mestu, ki so nastale zaradi 11. decimalke 5, ker niso vedeli ali naj navzgor ali navzdol zaokrožijo) je bilo najdenih nekaj nad 100, nekateri so jih več cenili.

Za Vegovega življenja je bilo najdenih ne več, kot 2 napaki v velikem logaritmnovniku. Natančnega števila napak še ne vemo, ker so ocenitve zelo različne.

Imamo jih 3.:

1. *Mali logaritmovnik:* (Takratna šolska izdaja za dijake) je obsegal 7-mestne logaritme števil in trigonometričnih funkcij.

2. *Srednji logaritmovnik* ima isto kot mali logaritmovnik, ima pa Napierjeve logaritme (osnova e) na 8 decimalk in zbirko matematičnih formul, zlasti integralnih. Ima preglednico praštevil do 400 000 in π na 140 decimalk.

3. Vegov veliki logaritmovnik *Thesaurus logarithmorum completus* ima 713 strani. Tukaj so Briggsovi logaritmi navadnih števil od 1—101 000 na 10 decimalk

logaritmi trigonometričnih funkcij prav tako. Od 0—2° so bili koti razporejeni za vsako sekundo, za vse ostale kote je bila razdelitev po 10 sekund. Ima tudi Wolframovo tabelo logaritmov praštevil na 48 decimalk.

Lahko bi še marsikaj napravil, ako bi dosegel višjo starost, vendar je na neznan način 17. IX. 1802. izginul in so ga 9 dni nato našli mrtvega ob Donavi pri Nussdorfu, nedaleč od Dunaja. Ne ve se natančno, zakaj se ni dala stvar natančno dokazati, morebiti je policija imela premalo dokaznega gradiva za zasledovanje zločinca in njegovo odkritje, ali pa je ščitila zločince iz plemiških vrst, ki so bili Vegovi nasprotniki, ker je kot kmečki sin bil povišan v baronski stan.

Zaradi nevenljivih zaslug je dobil slovenski matematik Vega doprsni kip v Moravčah lete 1907., 1903. je dobil spomenik v Idriji, ki so ga 1932. Italijani odstranili in namestili eneg svojega na njegovo mesto pred realko. Samo mož, ki so mu ga izročili, naj ga razbije ga je na skrivej hranil in vrnil po osvoboditvi realki v Idriji.

Ljubljana še nima spomenika.

Tudi krater na luni nosi Vegovo ime.

Predlanskim je bila dvestoletnica njegovega rojstva in je zato potrebno, da se oddolžimo spominu velikega slovenskego in jugoslavenskega matematika.

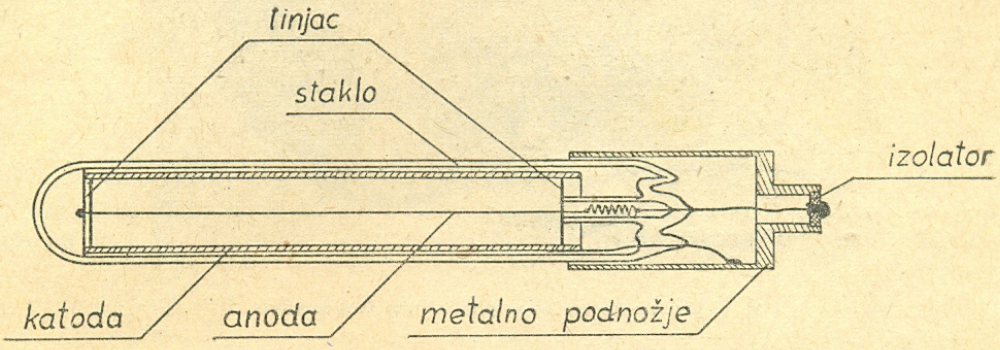
Geiger-Muellerov brojač

DUŠAN SRDOČ, Zagreb

Izraz »Geigerov brojač« izašao je danas iz rječnika fizičara i postao — ili vremenom postaje — pojam koji susrećemo gotovo svakodnevno. Tko nije čitao o prospektorima, koji poput svojih pretšasnika iz vremena »zlatne groznice« lutaju po bespućima u nadi i uvjerenju da će pronaći — ovaj puta ne zlatni rudnik, već nalazište urana. Umjesto pijuka i sita moderni su istraživači opremljeni Geigerovim brojačem. Međutim nije to jedina i najvažnija primjena ovog instrumenta. Manje bučna i poznata jeste primjena brojača u nauci i tehnici. Dugo bismo morali nabrajati sva područja naučne djelatnosti i praktične primjene, gdje se upotrebljava brojač. Uglavnom svaki rad sa radioaktivnim elementima vezan je sa mjerenjem intenziteta zračenja, koje vršimo pomoću brojača. Tako na pr. u medicini daju se pokusnim životinjama radio-aktivni elementi i prati njihov put kroz organizam. U botanici i agronomiji činimo to isto sa kulturnim biljkama. U industriji prate se i kontroliraju tehnološki procesi pomoću radio-aktivnih izotopa. Vanrednu ulogu imaju radio-aktivni izotopi u kemiji, specijalno u biokemiji, gdje vršimo »označavanje« kemijskih spojeva sa radio-aktivnim izotopima. Prema tome vidimo, da je vrijedno pobliže se upoznati sa radom tog značajnog instrumenta.

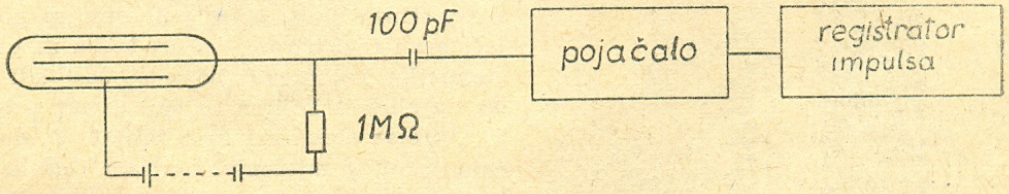
Najprije da se podsjetimo na neke pojmove i pojave iz fizike, koje moramo poznavati da bismo razumjeli djelovanje brojača. To je u prvom redu pojam »radio-aktivno zračenje«. Sjetimo se, da se neki elementi (prirodni i umjetno proizvedeni) raspadaju zračeći pri tome energiju u obliku elektromagnetskog titranja vrlo visoke učestalosti. To su poznate gama zrake, koje odašilje na pr. radij između prirodnih radio-elemenata i kobalt 60 proizveden u nuklearnom reaktoru. Ovo su vrlo prodorne zrake, opasne po živi organizam, a blize po svojstvima rentgenskim zrakama. Jedna je njihova važna osobina da ioniziraju plinove, t. j. otkidaju od molekula ili atoma plina vanjske elektrone. Pored gama zračenja, radio-aktivni elementi često odašilju i dvije druge vrsti zračenja, poznate pod nazivom alfa i beta zračenje. Alfa zrake nisu ništa drugo no dvostruko nabijene jezgre plemeni-

tog plina helija, a beta zrake sačinjavaju elektroni. Ove čestice izlijeću iz atoma sa velikom brzinom, te također ioniziraju plinove. Međutim, njihova je prodornost mnogo manja, te u uzduhu alfa čestice prevale tek 5 do 6 cm, a zaustavlja ih list papira. Beta zrake mogu biti prodornije, no kod nekih elemenata su i one vrlo slabe, što čini veliku poteškoću za njihovo mjerenje. Plin, koji je izložen utjecaju alfa, beta ili gama zračenja postaje električki vodljiv, što također koristimo za mjerenje intenziteta zračenja. Aparat koji radi na tom principu naziva se »ionizaciona komora«. Ako ovom znanju dodamo još poznatu pojavu da se svaka nabijena čestica kreće ubrzano u električnom polju i pri tome dobiva kinetičku energiju možemo prijeći na opisivanje Geigerovog brojača.



Sl. 1. Geigerov brojač za gama zrake

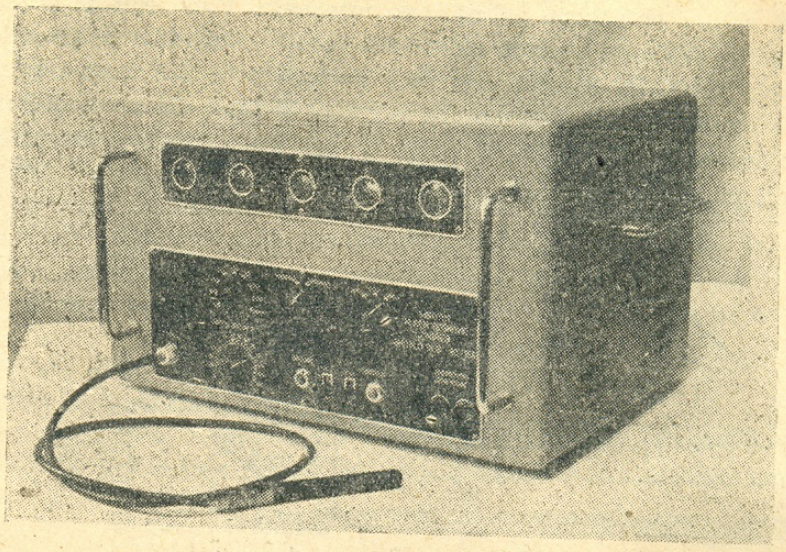
Svaka brojačka cijev sastoji se od dviju elektroda: pozitivne anode u obliku žice i negativne katode u obliku šupljeg cilindra. Elektrode su zatvorene u stakleni balon, a njihov smještaj vidimo iz slike 1. Stakleni balon sa ugrađenim elektrodama se najprije evakuira, a zatim napuni sa smjesom plinova, najčešće sa argonom i parama alkohola, te zatali. Geigerov brojač je sada spreman za rad i moramo ga uključiti u odgovarajući uređaj pomoću kojeg vršimo mjerenje. U tu svrhu potreban nam je izvor napona, pojačalo i registrator pulseva, kako je to shematski nacrtano na slici 2. Kada priključimo određeni napon na Geigerovu



Sl. 2. Shema uređaja za registraciju zračenja

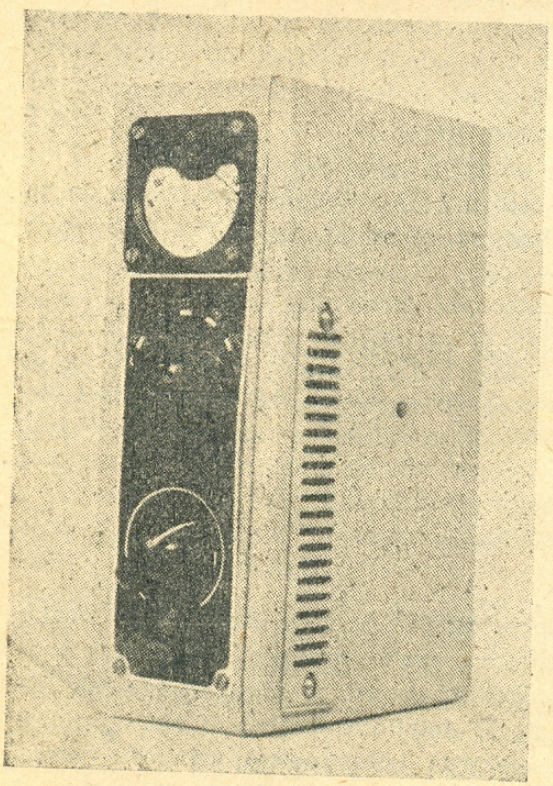
cijev, nastane u cilindru jako električno polje. Brojač je sada osjetljiv na svaku nabijenu česticu, koja uđe unutar šupljeg cilindra. Da bi razumjeli djelovanje brojača, promotrimo sudbinu jednog elektrona, koji se stvorio u plinu unutar osjetljivog dijela brojača uslijed gama zračenja, ili je doletio u brojač iz nekog radioaktivnog izvora. Uslijed električnog polja elektron biva snažno privučen prema pozitivnoj elektrodi i pri tome doživljava niz sudara sa molekulama plina. Uslijed

sve jačeg polja u blizini anode elektron dobiva sve više kinetičke energije između dva sudara, te konačno postaje sposoban da sam ionizira molekule plina prilikom sudara. Ovaj proces se ponavlja i dalje, jer novo stvoreni elektroni također suda-



Sl. 3. Elektronsko brojilo sa priključenim GM brojačem

rom stvaraju potomke i proces se razvija poput lančane reakcije u t. zv. Townsendovu lavinu — nazvanu u čast istraživača u području električnog vođenja u plinovima. Lavina prestane kad svi nastali elektroni dođu do anode, a svi pozitivni ioni otputuju prema katodi. Svrha je organskih plinova da preuzmu naboje sa ioniziranih atoma argona i time olakšaju gašenje lavine u brojaču. Time je jedan ciklus završen i brojač se vrati u prvobitno osjetljivo stanje. Elektroni i pozitivni ioni koji su nastali u lavini stvore kratkotrajnu slabu struju u električnom krugu, t. zv. strujni puls, kojeg pojačamo sa pojačalom i registriramo sa uređajem za registraciju. Taj uređaj može se sastojati i od slušalica u kojima se čuje svaki puls, t. j. prolaz elektrona kroz brojač. U slučaju točnijeg mjerenja, umjesto slušalica imademo jedan elektronski uređaj, kojim vršimo točno mjerenje broja pulseva u sekundi, što nam daje mjerilo za jakost nekog zračenja. Takav jedan uređaj, koji može izbrojiti 100.000 impulsa u sekundi vidimo na slici 3.



Sl. 4. Prenosni uređaj za mjerenje radioaktivnog zračenja

Za različita zračenja izrađuju se i posebne brojačke cijevi. Tako na pr. za istraživanje kozmičkih zraka brojači imaju velike dimenzije, jer je to zračenje

relativno slabog intenziteta. Za mjerenje nekih izotopa brojači posjeduju »prozore« od tankog tinjca, koji propuštaju alfa i beta zračenje.

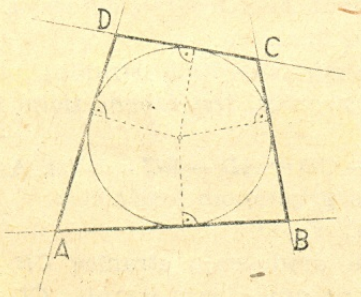
Jedan uređaj koji služi za mjerenje snažnog radio-aktivnog zračenja vidimo na slici 4. Ovaj uređaj radi na baterijski pogon, te je stoga prenosnog tipa. Za naučne svrhe konstruiran je još čitav niz raznih modela, no svi ti brojači rade na naprijed opisanom principu.

U našoj zemlji također se izrađuju ovi dragocjeni instrumenti. Uređaji prikazani na fotografijama izrađeni su u našim institutima za proučavanje nuklearne energije i predstavljaju lijep uspjeh naših stručnjaka.

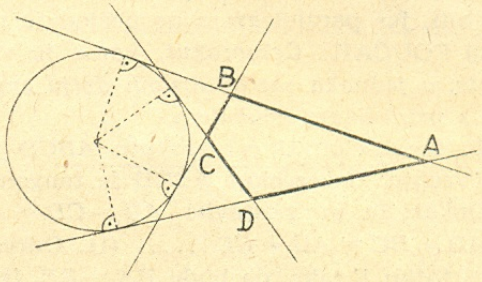
O tangencijalnom četverokutu s pripisanom kružnicom

LAV RAJČIĆ, Zagreb

1. — Kad se u planimetriji govori o tangencijalnim četverokutima, dakle o četverokutima kojima stranice leže na četiri tangente jedne te iste kružnice, onda se uzima u obzir samo tangencijalni četverokut s upisanom kružnicom (sl. 1.), a ispušta se obično iz vida tangencijalni četverokut s pripisanom kružnicom (sl. 2.).



Sl. 1.

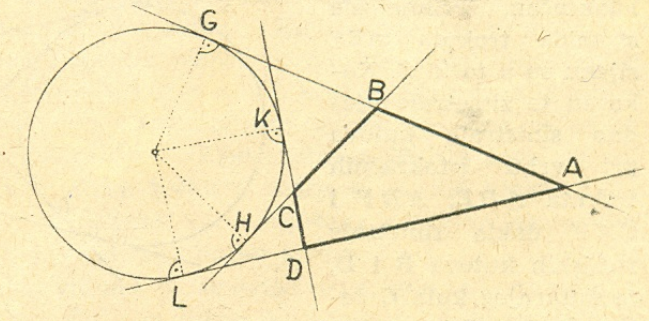


Sl. 2.

Za tangencijalni četverokut s upisanom kružnicom poznati su poučci (poučak i njegov obrat):

a) *U tangencijalnom četverokutu s upisanom kružnicom je zbroj dviju suprotnih stranica jednak zbroju drugih dviju suprotnih stranica.*

b) *Četverokut, kome je zbroj dviju suprotnih stranica jednak zbroju ostalih dviju suprotnih stranica, jest tangencijalni četverokut s upisanom kružnicom.*

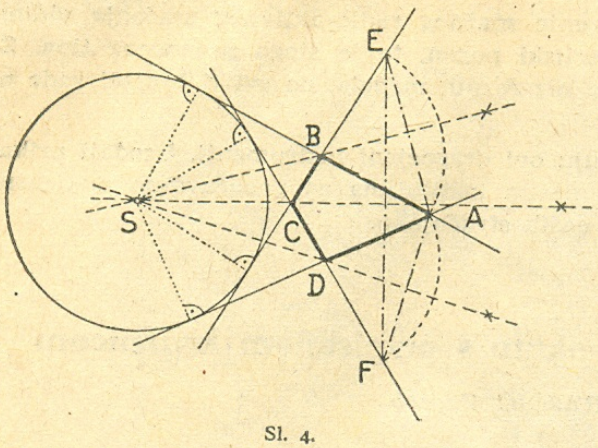


Sl. 3.

2. — Pokazat ćemo, da i za tangencijalni četverokut s pripisanom kružnicom vrijede slični poučci, koji se i na sličan način dokazuju.

a) POUČAK: *U tangencijalnom četverokutu s pripisanom kružnicom razlika dviju suprotnih stranica, koja je različita od nule, jednaka je razlici drugih dviju suprotnih stranica.*

Pretpostavka: Četverokut $ABCD$ je tangencijalni s pripisanom kružnicom.



Sl. 4.

Tvrdnja: $AB - CD = AD - BC \neq 0$

Dokaz: Poznato nam je, da su duljine tangenata neke točke s obzirom na zadanu kružnicu među sobom jednake. Prema slici 3. je zato:

$$AG = AL,\ BG = BH,\ CH = CK \text{ i } DK = DL \ldots . \quad (1)$$

Nadalje je prema sl. 3.

$$AB = AG - BG,\ CD = DK - CK.$$

Oduzevši lijeve od lijevih, a desne od desnih strana tih jednadžbi, dobivamo:

$$AB - CD = (AG - DK) - (BG - CK)$$

Prema relacijama (1) je dalje $AB - CD = (AL - DL) - (BH - CH)$ ..... (2)

Budući da je prema sl. 3. $AL - DL = AD$, $BH - CH = BC$, slijedi prema relaciji (2), da je $AB - CD = AD - BC$.

Da je uvijek $AB - CD = AD - BC \neq 0$ izlazi otuda, što bi iz $AB - CD = AD - BC = 0$ slijedilo, da je promatrani četverokut $ABCD$ paralelogram; a to ne može biti, jer paralelogram ne posjeduje pripisanu kružnicu.

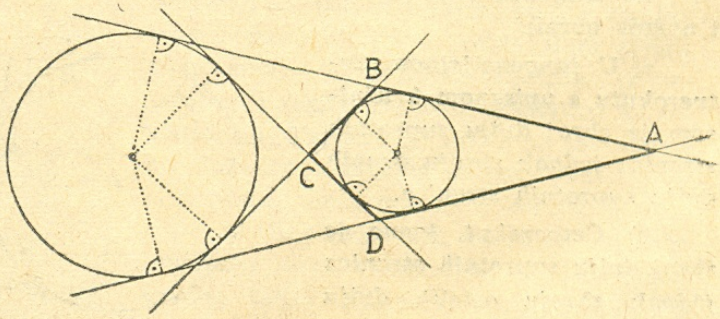
b) POUČAK: *Četverokut, kome je razlika dviju suprotnih stranica različita od nule, a jednaka razlici drugih dviju suprotnih stranica, jest tangencijalni četverokut s pripisanom kružnicom.*

Pretpostavka: U četverokutu $ABCD$ je $AB - CD = AD - BC \neq 0$ (sl. 4.).

Tvrdnja: Četverokut $ABCD$ je tangencijalni s pripisanom kružnicom.

Dokaz: Iz pretpostavke $AB - CD = AD - BC$ slijedi

$AB + BC = AD + CD$ ..... (1). Odredimo na produženju stranice CB preko vrha B točku E tako, da bude $BA = BE$. Isto tako na produženju stranice CD preko vrha D odredimo točku F tako, da bude $DA = DF$. Zato su trokuti ABE i ADF istokračni; no i trokut CEF je prema relaciji (1) istokračan. Simetrale stranica trokuta AEF sijeku se u točki S. Kako su te simetrale ujedno simetrale kutova pri vrhu istokračnih trokuta ABE, ADF i CEF dakle simetrale vanjskih kutova B i D, te nutarnjeg kuta C četverokuta $ABCD$, točka S je jednako udaljena od stranica četverokuta $ABCD$. Točka S je zato središte kružnice, koja je pripisana četverokutu $ABCD$.



Sl. 5.

3. — Postoji li tangencijalni četverokut $ABCD$ koji posjeduje upisanu i pripisanu kružnicu? Za takav četverokut moraju biti zadovoljene ove relacije:

$AB + CD = AD + BC$ i $AB - CD = AD - BC \neq 0$. Iz tih relacija slijedi da je $AB \neq CD$, $AB = AD$ i $CB = CD$, a to nam kazuje da je četverokut $ABCD$ deltoid (sl. 5.).

O neeuklidskim geometrijama

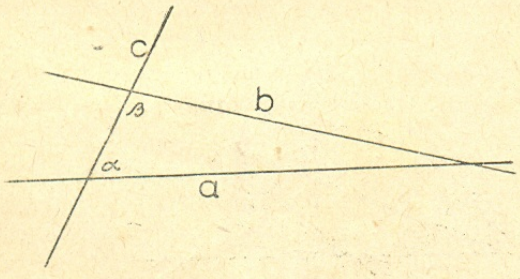
DANILO BLANUŠA, Zagreb

4. Aksiom o paralelama; postanak neeuklidskih geometrija

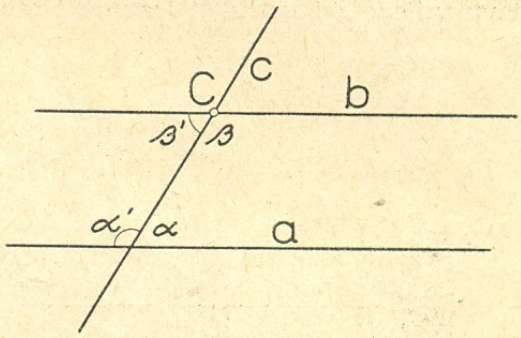
Postoji više starih rukopisa Euklidova djela »Elementi«, koji se u nekim pojedinostima razlikuju. Prema najboljim sadanjim kritičkim izdanjima nalaze se na početku toga djela 23 definicije, u kojima se objašnjavaju razni pojmovi, 5 postulata, koji daju osnovne tvrdnje geometrijske prirode (na pr.: od svake točke do svake točke može se povući dužina) i 9 aksioma, gdje se izriču neke opće istine (na pr.: kad se od jednakoga oduzme jednako, ostaci su jednaki).

Nije sasvim lako razlučiti pojam postulata od pojma aksioma, jer je već kod Grka o tome bilo raznih mišljenja. Zbog toga je raspored osnovnih tvrdnji u postulate i aksiome u nekim izdanjima drukčiji. Napose je 5. postulat, koji će nam biti važan, u tim izdanjima naveden kao 11. aksiom.

5. postulat zahtijeva, da se dva pravca a, b presječena trećim c sijeku, ako je zbroj kutova α, β, koji nastaju iznutra s jedne strane trećeg pravca, manji od π, i da se sijeku s te iste strane trećeg pravca (sl. 12.).



Sl. 12.



Sl. 13.

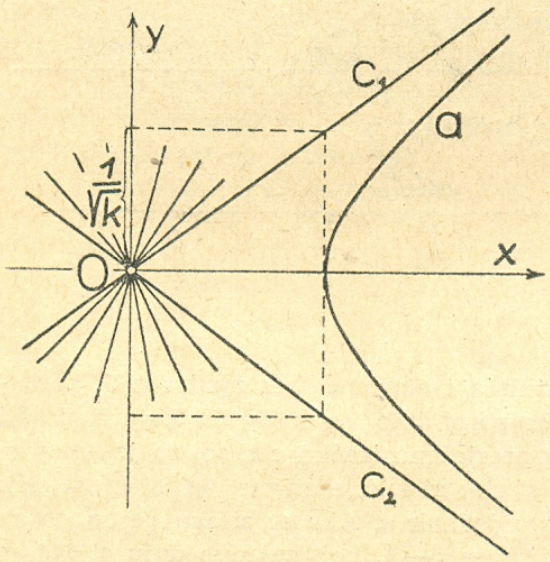
Treba sada istaći, da se iz ostalih postulata i aksioma, bez upotrebe 5. postulata, može izvesti, da je u svakom trokutu zbroj bilo kojih dvaju kutova manji od π. Ako dakle nacrtamo dva pravca a i b presječena trećim c tako, da je $\alpha + \beta = \pi$ (sl. 13), onda je sigurno, da se a i b ne sijeku ni s koje strane, jer bi inače sa c činili trokut, u kojemu je zbroj dvaju kutova jednak π. Ako se sijeku desno, to su α i β, ako se sijeku lijevo, to su $\alpha' = \pi - \alpha$ i $\beta' = \pi - \beta$, koji zajedno daju $\alpha' + \beta' = \pi - \alpha + \pi - \beta = 2\pi - (\alpha + \beta) = 2\pi - \pi = \pi$. Dva pravca u ravnini, koja se ne sijeku, zovu se paralele (prema 23. definiciji u »Elementima«). Prema tome je osigurana egzistencija paralela, t. j. kroz neku točku C može se povući barem jedna paralela s pravcem a (sl.13). Time je dakako već isključena eliptička geometrija, jer se tamo svaka dva »pravca« (t. j. geodetske linije) sijeku.

Dodamo li sada 5. postulat, onda vidimo, da će svaki drugi pravac kroz točku C sjeći pravac a, i to desno, ako je $\alpha + \beta < \pi$, a lijevo, kad je $\alpha + \beta > \pi$, jer je onda $\alpha' + \beta' < \pi$. Postoji dakle samo jedna paralela kroz C s pravcem a. Zbog toga se 5. postulat zove postulat (ili aksiom) o paralelama i često se tako izriče: Kroz zadanu točku može se povući samo jedna paralela sa zadanim pravcem.

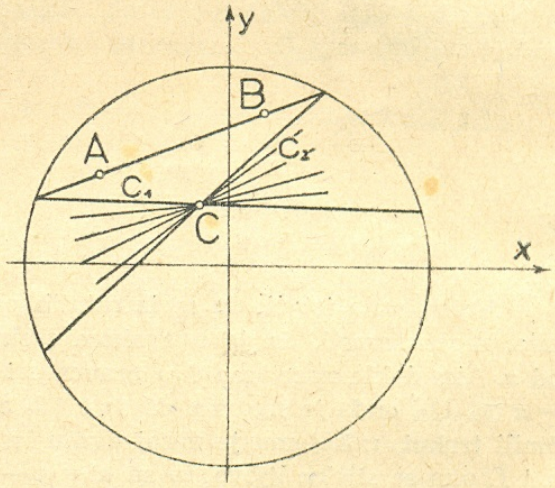
Izgledalo je, da bi se taj 5. postulat morao dati izvesti iz ostalih postulata i aksioma, pa su već stariji grčki komentatori Euklidova teksta pokušali dati dokaz toga stavka. U novije doba najopsežniji takav pokušaj poduzeo je *G. Saccheri* (1667—1733), a bilo je i bezbroj drugih, koji su mislili, da su taj postulat dokazali. No

svagdje se našlo, da su umjesto njega upotrebljene neke druge pretpostavke, koje nisu sadržane u Euklidovim postulatima i aksiomima, i svi su ti pokušaji konačno propali, dok nije prodrlo uvjerenje, da se 5. postulat ne može dokazati na temelju ostalih. Sagrađena je geometrija bez 5. postulata, koja je djelo triju matematičara: *N. I. Lobačevski* (1793 ili 1792—1856. Godina rođenja nije sigurno utvrđena), *J. Bolyai* (1802—1860) i *C. F. Gauss* (1777—1855). Lobačevski je dao opsežno i pomno razrađen sustav geometrije, u kojoj ne vrijedi 5. postulat. Bolyai je nezavisno dao kratak i vrlo sažet, ali majstorski prikaz te iste geometrije, a Gauss je također dopro do svih osnovnih rezultata, ali ih nije objelodanio bojeći se otpora, na koji bi takve ideje naišle.

Dosta je vremena postojalo sporno pitanje, da li je takva geometrija, u kojoj ne vrijedi 5. postulat, zaista neprotivrječna, t. j. ne će li se daljim zaključivanjima u okviru toga geometrijskog sustava doći do protivrječja. To je pitanje riješeno, kad je uspjelo u okviru same euklidske geometrije (za koju se nije sumnjalo, da je neprotivrječna) načiniti interpretacija te neeuklidske ili hiperbolne geometrije (Lobačevski ju je zvao »pangeometrija«) time, da se neke geometrijske tvorevine euklidske geometrije upotrebe kao »točke« i »pravci« toga novog geometrijskog sustava, da se prikladno definiraju kutovi i udaljenosti, pa da onda u tom sustavu vrijede svi postulati i aksiomi osim 5. postulata.



Sl. 14.



Sl. 15.

Mi smo takvu jednu interpretaciju već spomenuli, kada smo udaljenost dviju točaka definirali formulom (14). Budući da geodetske linije preuzimaju ulogu pravca, treba samo svaku granu hiperbola poput onih u sl. 11 zvati »pravcem« i kutove mjeriti po propisu, koji smo dali, pa da dobijemo novu »geometriju«. Može se pokazati, da u njoj vrijede svi Euklidovi postulati i aksiomi osim 5. postulata, koji ne vrijedi. Mi ćemo ilustrirati samo ovo posljednje. Zadajmo dakle jedan »pravac«, na pr. kao desnu granu jedne hiperbole prema sl. 14, i jednu točku, na pr. točku *O*. (Točka *O* nam je najzgodnija, jer su »pravci« kroz tu točku ujedno i euklidski pravci). Vidimo smjesta, da ima cijeli pramen pravaca između asimptota c_1 i c_2, koji ne sijeku »pravac« *a*. Pravci c_1 i c_2 se obično zovu »paralele«, a ostali pravci između njih »hiperparalele« »pravca« *a* povučene kroz točku *O*. Zaista je dakle narušen 5. postulat, jer ima više od jedne paralele s pravcem *a*, povučene kroz točku *O*.

Rekli smo, da je ostalim Euklidovim postulatima i aksiomima isključena eliptička geometrija. Danas pored Euklidova sustava postulata i aksioma postoje i drugi sustavi aksioma (vise nije običaj govoriti o postulatima), logički savršeniji od Euklidova, a jedan od najpoznatijih takvih sustava je postavio *D. Hilbert* (1862 — 1943). I u njegovu sustavu aksioma isključuje se eliptička geometrija. Da je kod svih tih razmatranja eliptička geometrija isprva ostala po strani, posljedica je toga, što je »pravac« u eliptičkoj geometriji zatvorena crta konačne duljine, čime se ta geometrija jako odvaja od euklidske i hiperbolne geometrije. Ipak se mogu izgraditi i takvi sustavi aksioma, da se sve tri geometrije iz njih daju izvesti, prema tome, da li se traži, da kroz danu točku s pravcem postoji nijedna, jedna ili više paralela.

Put, kojim smo mi isprva pošli u ovom članku, historijski je kasniji, ali se tako jasnije vidi, zašto uz hiperbolnu neeuklidsku geometriju (koja je isprva bila jedina neeuklidska) treba promatrati i eliptičku neeuklidsku geometriju.

5. Izometričke i neizometričke interpretacije neeuklidskih geometrija

Vidjeli smo, da se može načiniti interpretacija eliptičke ili hiperbolne geometrije u ravnini time, da se udaljenost dviju točaka definira drukčije, nego što je dana u euklidskoj geometriji. Duljina neke crte u toj ravnini bit će onda drukčija, kad je mjerimo u toj tako definiranoj metrici, nego kad je mjerimo na običan način. No mi smo vidjeli i jednu interpretaciju hiperbolne gometrije na pseudosferi, istina samo »u malom«, gdje je duljina neke crte na plohi upravo tako mjerena, kako bismo je mjerili s gledišta euklidske metrike prostora, u kojemu se ploha nalazi. Isto tako se može eliptička geometrija »u malom« interpretirati na kuglinoj plohi (nazivajući glavne kružnice »pravcima«), dok je to »u velikom« sferna geometrija.

Zamislimo neku plohu, koja se nalazi u prostoru ili, kako se još kaže, koja je smještena u tom prostoru, i na toj plohi definiranu metriku jedne od neeuklidskih geometrija. Ako se duljina svake crte na toj plohi mjerena u okviru te definirane metrike podudara s duljinom te crte mjerenom u običnom smislu, t. j. na temelju euklidske metrike prostora, u kojemu je ploha smještena, kazat ćemo, da smo dobili izometričku interpretaciju te geometrije i izometričko smještenje te plohe (koja će se zvati eliptička ili hiperbolna ravnina, prema tome, o kojoj se geometriji radi). U protivnom slučaju interpretacija geometrije odnosno smještenje plohe je neizometričko.

Mi smo dosada vidjeli neizometričku interpretaciju eliptičke i hiperbolne geometrije u običnoj euklidskoj ravnini, dakle i neizometričko smještenje eliptičke i hiperbolne ravnine u prostoru (naime u obliku obične ravnine). Zatim smo »u malom« imali izometričku interpretaciju eliptičke geometrije na kugli i hiperbolne geometrije na pseudosferi, t. j. izometričko smještenje dijelova eliptičke odnosno hiperbolne ravnine u obliku dijelova kugle ili pseudosfere.

Postavlja se pitanje, da li postoji izometričko smještenje čitave eliptičke odnosno hiperbolne ravnine u prostoru. Odgovor na oba pitanja je niječan, što je oboje dokazao D. Hilbert (1901). (Za eliptičku ravninu već prije njega H. Liebmann 1899.)

Spomenut ćemo još dvije zanimljive neizometričke interpretacije hiperbolne geometrije u dijelovima euklidske ravnine.

U Kleinovoj interpretaciji (*F. Klein*, 1849—1925) sva je hiperbolna geometrija predočena unutar kružnice u ravnini. Jednadžba kružnice s polumjerom 1 glasi

(17) $$x^2 + y^2 = 1.$$

Unutar te kružnice (sl. 15) definiramo udaljenost $D(A,B)$ dviju točaka $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$ izrazom

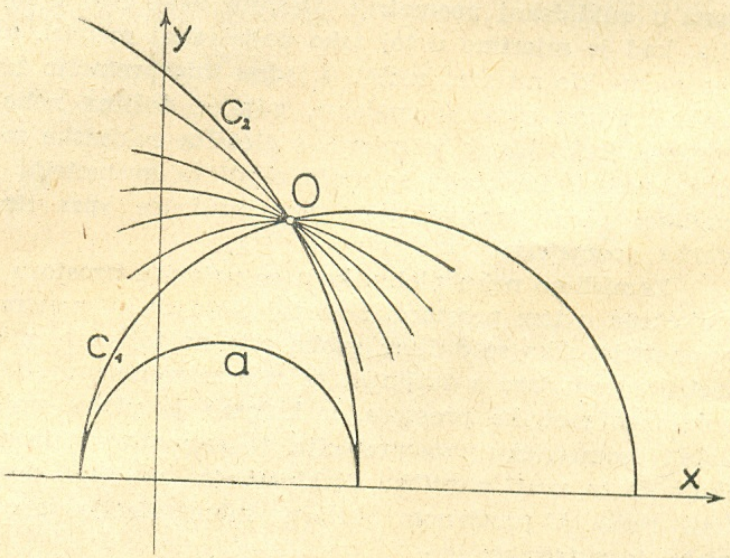
$$D(A,B) = \frac{1}{\sqrt{k}} ln\,(\Omega + \sqrt{\Omega^2 - 1}), \tag{18}$$

gdje je Ω kratica sa značenjem

$$\Omega = \frac{1 - x_1 x_2 - y_1 y_2}{\sqrt{1 - x_1^2 - y_1^2}\sqrt{1 - x_2^2 - y_2^2}}. \tag{19}$$

»Pravci« naše geometrije su tetive te kružnice, a kutove treba mjeriti na izvjestan način u skladu s danom metrikom, u što dalje ne ulazimo. Vidimo i ovdje, da kroz točku C postoje dvije paralele c_1 i c_2 s »pravcem« AB (t. j. tetivom kroz A, B) i, među njima, pramen hiperparalela. Naime, sve te tetive ne sijeku tetivu AB unutar kružnice, pa niti c_1 i c_2, koje je sijeku tek na kružnici. No točke same kružnice više ne spadaju u našu geometriju. Tetive mjerene u gore označenoj metrici neizmjerno su dugačke. Tome se ne trebamo čuditi. U interpretaciji eliptičke geometrije vidjeli smo obrnuto: neizmjerno dugački pravci bili su konačne duljine, kad smo ih mjerili u novoj metrici.

Uviđamo lako, zašto je bilo nemoguće načiniti takvu interpretaciju hiperbolne geometrije u ravnini, da čitavi pravci budu »pravci« te geometrije. Ne bi se onda dao ukloniti postulat o paralelama! No kad se promatraju samo dijelovi pravaca, kao kod Kleinove interpretacije, onda je moguće postići, da najkraće spojnice u novoj metrici budu obične pravocrtne spojnice (samo s drugom »duljinom«).



Sl. 16.

Konačno jedna neizometrička interpretacija hiperbolne geometrije u euklidskoj poluravnini. Promatraju se samo točke sa $y > 0$, t. j. gornja poluravnina. Metrika je definirana sa

$$D(A,B) = \frac{1}{\sqrt{k}} ln\,(Z + \sqrt{Z^2 - 1}), \tag{20}$$

gdje je Z znači

$$Z = \frac{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}{2y_1 y_2} + 1. \tag{21}$$

Ovdje se pokazuje, da su geodetske linije, dakle »pravci« te geometrije, polukružnice sa središtem na osi x i pravci okomiti na osi x (sl. 16). Vidimo i tu, da s »pravcem« a kroz točku O postoje paralele c_1 i c_2 i pramen hiperparalela među njima. Kod ove interpretacije je razumljivo, da kutovi izlaze na temelju te metrike

isti kao u enklidskoj metrici. Kažemo stoga, da je interpretacija konformna. Ona se obično naziva Poincaréova interpretacija (*H. Poincaré*, 1854—1912), premda ju je našao već G. Darboux.

Rekli smo, da nema izometričkog smještenja eliptičke i hiperbolne ravnine u euklidskom trodimenzionalnom prostoru. No u matematici se razmatraju i prostori od više nego tri dimenzije. (O tom pobliže možda drugom prilikom.) Postavlja se pitanje, ne bi li se našlo izometričko smještenje u takvu višedimenzionalnom euklidskom prostoru. Autor ovoga članka pokazao je (1952), kako se eliktička ravnina može izometrički smjestiti u četverodimenzionalnom euklidskom prostoru. Za hiperbolnu ravninu se dugo vjerovalo, da je nemoguće izometričko smještenje u euklidskom prostoru, makar višedimenzionalnom. L. Bieberbach (1932) našao je takvo smještenje u euklidskom prostoru od neizmjerno mnogo dimenzija. (Takav se prostor zove Hilbertov prostor.) Iz vrlo općenitih rezultata o izometričkom smještavaju, koje je postigao tek pred 2 godine američki matematičar J. Nash, izlazi, da mora postojati takvo smještenje već u četverodimenzionalnom euklidskom prostoru. Ipak još nije uspjelo to smještenje zaista izračunati. No autoru je nedavno uspjelo sagraditi takvo smještenje u šesterodimenzionalnom euklidskom prostoru.

Na kraju napominjemo, da se prijelaz od euklidske geometrije na neeuklidske (eliktičku i hiperbolnu) može izvršiti ne samo u dvije dimenzije, već i u tri, pa i u više dimenzija. Neeuklidske trodimenzionalne geometrije razmatraju se posljednjih decenija u vezi s kozmološkim problemima, t. j. s problemom konstitucije svemira u njegovoj cjelini.

(Svršetak)

Fotografija u nuklearnoj fizici

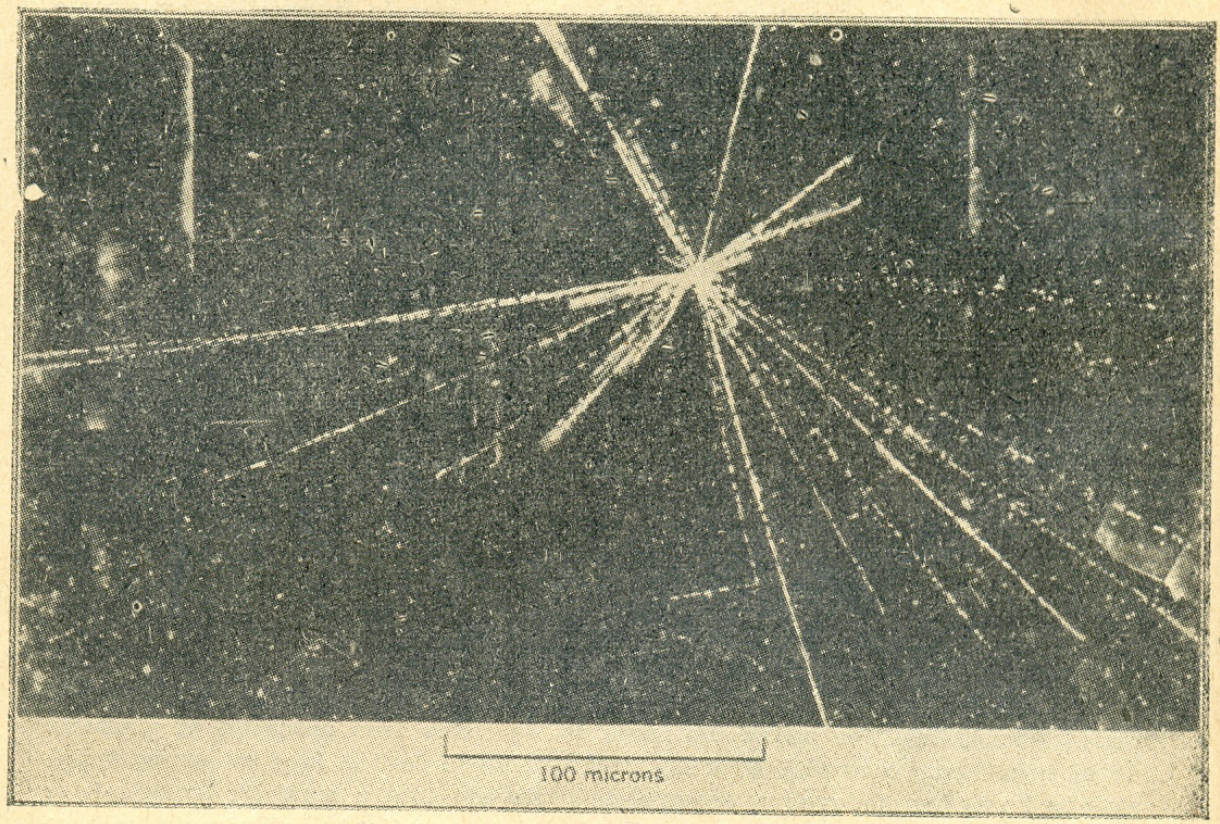
DRAGICA WINTERHALTER, Zagreb

Padne li zraka svjetlosti na fotografsku emulziju, zrna srebrnog bromida apsorbiraju fotone, koje ona sadrži. Potrebno je, da jedno zrno apsorbira više fotona, da bi se ono moglo razviti. Naprotiv, teške nabijene čestice, koje emitiraju radioaktivne tvari, imaju dovoljno energije da proizvedu trag u emulziji. Ispituje li se mikroskopom emulzija izložena svjetlosti nakon razvijanja i fiksiranja, vidi se mnoštvo odvojenih i slučajno razasutih zrna, dok se kod emulzija izloženih nabijenim česticama vide tragovi koji predočuju put čestice u emulziji. Obične fotografske emulzije imaju suviše velike razmake između zrna, da bi se mogli tragovi nabijenih čestica mjeriti. Zato je bilo potrebno proizvoditi specijalne emulzije za istraživanja u nuklearnoj fizici.

Fotonuklearne emulzije sadrže oko 10 puta više srebrnog bromida nego obične fotografske emulzije. Zrna su vrlo sitna promjera 0,1 do 0,6 μ, dok je kod običnih fotografskih emulzija promjer zrna 1 do 3,5 μ. Razmak između zrna vrlo je malen kako bi se tragovi čestica što bolje istakli. Debljina sloja emulzije može biti od 50 do 800 μ, pa i do 1200 μ, dok kod običnih emulzija ova debljina iznosi 5 do 20 μ. Prema energiji čestice odabire se debljina sloja. Što je energija čestice veća, sloj emulzije mora biti deblji, kako bi se u njemu čestica zaustavila, tada se njen trag može u cjelini proučavati. Mjerenjem dužine traga određuje se energija čestice, dok oblik traga upućuje na vrstu čestica.

Upotreba fotografskih emulzija u nuklearnoj fizici datira od njena postanka, jer je vezana sa otkrićem radioaktivnosti po H. Becquerel-u 1896. god. Već tada je

Becquerel primijetio, da zrake, koje emitiraju radioaktivne tvari uzrokuju zacrnjenje fotografske ploče. Ovo se svojstvo fotografskih ploča primijenilo na istraživanja radioaktiviteta. Tek 1910. i 1911. primijetili su Kinoshita i Reinganum da i pojedine čestice ostavljaju trag u fotografskoj emulziji. Razvoj električnih mjernih instrumenata potisnuo je za neko vrijeme fotografske ploče. Tek 1925. M. Blau otkriva tragove protona u fotografskim pločama. Industrija počinje proizvoditi osjetljive emulzije, što je omogućilo čitav niz istraživanja na području nuklearne fizike. Pravi razvoj fotonuklearne metode započinje 1939. radovima Powell-a i



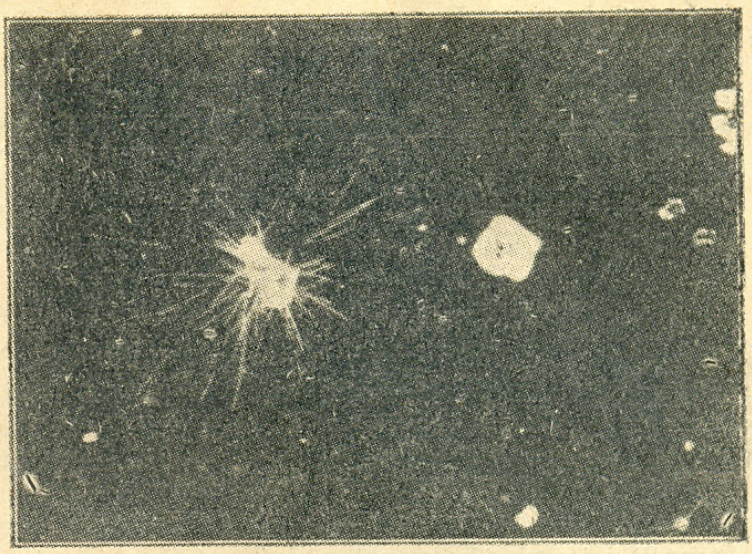
Sl. 1. — Iz knjige Yagoda: Radioactive Measurements str. 298 sl. 64. Legenda: Raspad jezgre srebra

Occhialini-a u Bristolu. Oni su sistematski ispitivali tehniku rada sa fotonuklearnim emulzijama. Nakon rata oni su istraživali, pomoću fotonuklearnih emulzija, kozmičko zračenje. Danas se proizvode u Engleskoj i Americi fotonuklearne emulzije različitih osjetljivosti, već prema vrsti čestica, koje se njima ispituju. Ovaj je razvoj omogućio, da su fotonuklearne emulzije danas u nuklearnoj fizici isto tako važan i koristan mjerni uređaj kao i Geigerov brojač, ionizaciona i Wilsonova komora i drugi.

Primjena fotonuklearnih emulzija obuhvaća gotovo čitavo područje nuklearne fizike, osim toga one se primjenjuju i u biologiji, metalurgiji, mineralogiji i kristalografiji. Navest ćemo samo neke od primjena.

Površinu Zemlje neprestano bombardiraju čestice, koje potječu od kozmičkog zračenja. U svakoj nuklearnoj emulziji mogu ove čestice zabilježiti trag. Kako je energija čestica vrlo velika, one mogu proizvesti i više tragova, koji izlaze iz istog središta, a nazivaju se zvijezdom. Tako je Leprince-Ringuet 1948. god. opisao zvijezdu, koja je prikazana na sl. 1., a koja se sastoji od 34 traga. Zvijezda je nastala

u fotonuklearnoj ploči izloženoj na visini od 4400 metara. On pripisuje ovu zvijezdu potpunom raspadu atoma srebra u emulziji. Nuklearne su ploče vrlo prikladne za ispitivanje kozmičkih zračenja, jer su lagane, pa se mogu slati balonima u velike visine. Osim toga u njima se neprekidno bilježe tragovi, i tako daju cjelokupnu sliku upadnog zračenja.



Sl. 2. — Iz knjige Yagoda: Radioactive Measurements str. 176 sl. 32. Legenda: Radioaktivno zrno minerala kruženo tragovima α-čestica (lijevo) i zrno minerala, koje nije radioaktivno (desno)

Fotonuklearne emulzije mogu služiti za ispitivanje radioaktivnosti minerala. U tu svrhu emulzija se smekša kratkim močenjem u destiliranoj vodi, zatim se po njenoj vlažnoj površini posipaju zrna minerala, koji se želi ispitati. Nakon eksponiranja od nekoliko dana vide se tragovi α-čestica oko radioaktivnih zrna. Na sl. 2. prikazano je jedno radioaktivno zrno, kao i jedno oko kojega nema tragova, dakle nije radioaktivno. Iz broja tragova zaključuje se o obliku i veličini zrna, aktivitetu i vremenu eksponiranja. Slično se primjenjuju nuklearne ploče u biologiji pod nazivom »autoradiografije«.

Detaljnji opis pojedinih primjena fotonuklearnih ploča prelazi okvire ovog članka. Upućujemo na literaturu.

Literatura: Faraggi H.: Thèses, 1950. Meyer P.: Naturwiss, *35*, 369 (1948). Teucher M.: Ergebniss d. exakt. Naturwiss. *28*, 407 (1955). Yagoda H.: Radioactive Measurements with Nuclear emulsions. 1949.

O atomskoj jezgri

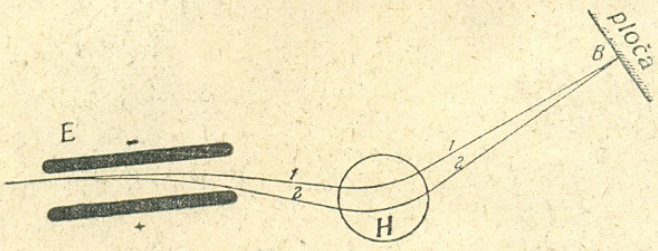
G. ŠINDLER, Zagreb

1. Nukleoni

Godine 1919. engleski je fizičar Aston nastojao skretanjem kanalnih zraka u električnom i magnetskom polju masenog spektografa što je moguće točnije, odrediti atomske težine pojedinih elemenata. Pomoću elementa, kojem je određivao atomsku težinu, proizveo je kanalne zrake. Dva zastora propuštaju kanalne zrake u jako električno polje, koje ih zakreće prema dolje (v. sliku 1). Zatim one stižu do magnetskog polja *H*. Njegove silnice stoje okomito na ravninu slike. Kod *B* padaju zrake na fotografsku ploču. S takvim uređajem, koji se zove maseni spektograf, sve čestice, koje imaju međusobno jednake naboje i jednake mase sastaju se na istom mjestu fotografske ploče, pa makar imale i različite brzine. Brže čestice prolaze put *1*, a sporije put *2*. Čestice, koje imaju jednak naboj kao ostale, ali drukčiju masu — to su atomi drugog izotopa istog kemijskog elementa — past će na drugo mjesto fotografske ploče. Tako nam maseni spektograf razlučuje atome različitih izotopa jednog istog kemijskog elementa.

Ovim postupkom ustanovio je Aston da se kripton sastoji od atoma s cjelobrojnim atomskim težinama: 78, 80, 82, 83, 84 i 86. Oni predstavljaju izotope kriptona. Tako je dokazano da je kemijska atomska težina kriptona 82,9 srednja vrijednost naprijed navedenih brojeva.

Ova činjenica ponovo oživljava Proutovu hipotezu iz 1815. godine i navodi na misao, da su atomi, i to specijalno atomska jezgra, građeni od istih čestica.



Sl. 1.

Prema Heisenbergu i Ivanjenku, sve su jezgre sastavljene iz nukleona. Nukleoni su protoni i neutroni, a njihove su mase gotovo jednake.

Proton ima pozitivni jedinični električni naboj, dok ga neutron nema. Svaki pojedinačni pozitivni naboj kompenzira se s jediničnim negativnim nabojem elektrona iz ljuske atoma. Prema tome veličina naboja jezgre Z poklapa se s brojem protona P u jezgri. Ako se pak pored protona u jezgri nalazi N neutrona, tad je

$$\boxed{A = P + N}$$

ukupni broj nukleona. Te čestice tvore jezgru.[1] Njihova zajednička masa predstavlja glavnu masu atoma i približno je jednaka atomskoj težini.

Veličine Z, N i A, karakteristične su za atom pojedinog elementa, jer one opisuju njegovu jezgru. Da bismo saznali, koliko se neutrona nalazi u jezgri, služimo se masenim spektografom. Pomoću njega odredimo veličinu A, veličinu P uzimamo iz periodskog sistema elemenata, pa dobivamo:

$$\boxed{N = A - P}$$

2. *Nuklearne sile*

Da bismo sebi mogli predočiti, kakve sile povezuju i drže na okupu protone i neutrone uvedimo najprije jednu novu mjernu jedinicu. To je jedan elektron volt (1 eV). Kad bismo jedan elektron unijeli u električno polje, ono bi na njega djelovalo. Nastojalo bi ga »otkloniti«. Time bi mu polje dalo izvjesnu energiju. Ona energija, koju bi elektron primio od električnog polja u razlici potencijala od 1 volta, naziva se jedan elektron volt. Dakle, to je vrlo mali iznos energije. Ako se ona izrazi u ergima, tada se dobiva

$$1\ eV = 1{,}6 \cdot 10^{-12}\ \text{erga}$$

Jedan milion elektron volti naziva se mega elektron volt i piše se 1 MeV (izgovaraj jedan, dva, tri i t. d. »meva«).

Pri uspoređivanju atomskih masa, za jedinicu mase (1 jM) uzimamo 1/16 mase najrasprostranjenijeg kisikovog izotopa. Pri tome pak jedinica mase izražena u gramima iznosi

$$1\ jM = 1{,}6 \cdot 10^{-24}\ g$$

[1] lat., nucleus = jezgra

Einstein nam je dao relaciju koja povezuje masu s energijom

$$E = m \cdot c^2$$

Pomoću nje izrazimo jedinicu mase (1 *jM*) u elektron voltima, t. j. kao energiju. Račun daje slijedeće:

$$E = \frac{1\ [jM] \cdot 9 \cdot 10^{20}}{1{,}6 \cdot 10^{-12}\ [\text{erga}]}\ [eV] = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-24} \cdot 9 \cdot 10^{20}}{1{,}6 \cdot 10^{-12}}\ [eV] =$$

$$= \frac{14{,}4 \cdot 10^{-4}}{1{,}6 \cdot 10^{-6}}\ [MeV] = 0{,}9 \cdot 10^3\ [MeV]$$

Prema tome je jedna tisućinka jedinice mase (10^{-3} *jM*) ekvivalentna s 0,9 »*meva*«.

Masa protona iznosi približno $M_p = 1{,}0076\ jM$, a masa neutrona $M_n = 1{,}0090\ jM$. Obzirom na to, da je sva masa atoma skoncentrirana u jezgri, mora se pretpostaviti, da će zbroj masa svih nukleona dati ukupnu masu atoma. Međutim tome nije tako. Stvarna masa manja je od ukupnog zbroja masa pojedinih zasebnih, slobodnih nukleona. Ova razlika u masi naziva se defektom mase i piše se

$$\delta M = Z \cdot M_p + N \cdot M_n - M$$

Za uran $_{92}U^{235}$ iznosi defekt mase

$$92 \cdot 1{,}0076 + 143 \cdot 1{,}0090 = 236{,}97\ jM$$
$$- \text{ poznata masa} \qquad\qquad 235{,}-\ jM$$

$$\delta M_{92}U^{235} = 1{,}97\ jM$$

Ovu razliku u masi pretvorimo u energiju.

$$E = \delta M \cdot 0{,}9 \cdot 10^3\ [MeV] = 1{,}97 \cdot 0{,}9 \cdot 10^3\ [MeV] = 197 \cdot 9\ [MeV] = 1773\ [MeV].$$

Odavle proizlazi, da su sile vezivanja nukleona, koje djeluju u atomskoj jezgri, jake. Međutim pokazalo se, da su one malog dosega. Kad bi one imale veći doseg, tad bi svaka čestica vezivala i ostale čestice. Prema tome bi i energija vezivanja morala rasti s brojem čestica. Kod težih jezgri morala bi ona biti u odgovarajućoj mjeri veća, nego kod lakših jezgara. Znamo da u makrosvijetu gravitaciona sila raste s masom. Međutim, u mikrosvijetu atoma, taj zakon ne vrijedi. Doseg sila vezivanja iznosi najviše 10^{-13} *cm*.

Kod vodenih kapi molekule su također povezane silama »malog dosega«. Kohezija djeluje na male udaljenosti. Jedna molekula djeluje samo na molekule, koje se nalaze u njezinoj blizini. Na molekulu, koja se nalazi na površini kapi, djeluju bliske molekule iz njene unutrašnjosti. To stvara napetost površine, koja oblikuje kap. Slično ovome, unutarnje sile vežu nukleone u jezgri.

Gamov je zamislio atomsku jezgru sličnu kapi vode. Ova analogija jezgre s vodenom kapi jest model, koji pomaže da lakše zamislimo jezgru. Fizičari često stvaraju modele da lakše protumače pojave koje je inače teško sagledati. Model kapi pokazao se korisnim, i to osobito za objašnjenje raspada jezgre na manje dijelove.

Kad vodenu kap zagrijemo, ona zatitra i ispari. Na sličan način zamišlja se mehanizam raspada atomske jezgre. Kad atomska jezgra primi neutron odgovarajuće brzine, t. zv. rezonantni neutron, njegovim utjecajem jezgra se pobudi i zatitra. Ovo može dovesti do raspada jezgre.

3. Oslobađanje nuklearnih sila

Godine 1938. nastavili su Hahn i Strassmann pokuse s kojima su se godinu dana prije bavili I. Curie i P. Savić. Bombardirajući uran neutronima dobili su dvaput lakše elemente, lantan i brom odnosno barij i kripton. Meitner i Frisch uočili su, da se tu radi o novo otkrivenom procesu, i to o cijepanju, dezintegraciji ili fisiji uranove jezgre. Kad uranovu jezgru pogodi neutron, cijepa se ona u dvije atomarne krhotine, koje se razlijeću velikom energijom od oko 170 »meva«. Uz ove krhotine oslobađaju se i dva do tri nova neutrona. Ovi neutroni mogu cijepati daljnje jezgre i tako izazvati lančanu reakciju.

Kasnije je otkriveno da se sporim neutronima u stvari lako cijepa jezgra uranovog izotopa $_{92}U^{235}$. Jezgra izotopa $_{92}U^{238}$, kojeg ima 140 puta više, ne da se lako cijepati. Ali ipak, ako neutronima damo kinetičku energiju oko 25 eV, tad jezgra uranovog izotopa $_{92}U^{238}$ uhvati neutron i postaje radioaktivan.

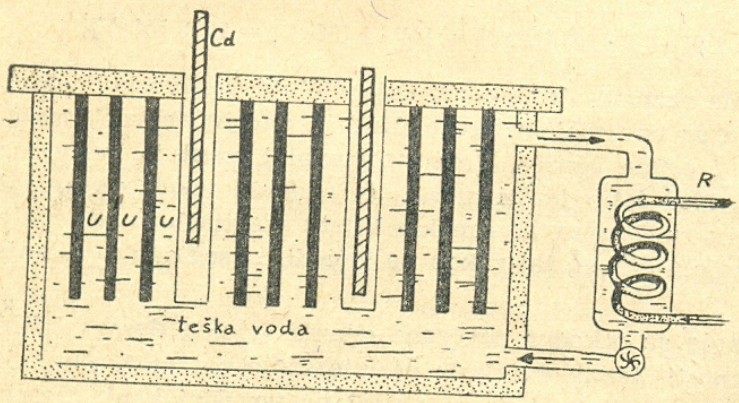
$$_{92}U^{238} + {}_{0}n^{1} \rightarrow {}_{92}U^{239} \rightarrow {}_{93}Np^{239} + {}_{-1}e^{0}$$

Novo stvoreni element neptunij zrači β zrake i pri tome se pretvara u plutonij.

$$_{93}Np^{239} \rightarrow {}_{94}Pu^{239} + {}_{-1}e^{0}$$

Danas u uranskoj peći, atomskim ili nuklearnim reaktorima, pomoću sporih neutrona cijepamo jezgre uranovog izotopa $_{92}U^{235}$. Time oslobađamo nuklearne sile i pretvaramo nuklearnu u toplinsku energiju. Zato uzimamo dovoljno velike i čiste komade prirodnog urana, koje ugrađujemo u grafit ili ih stavljamo u tešku vodu. Grafit i teška voda usporuju neutrone, tako da postanu sposobni za cijepanje jezgri $_{92}U^{235}$.

Za odvijanje lančane reakcije »eksplozivno« tijelo mora imati t. zv. kritičnu veličinu. Ako je ono premalo, oslobođeni neutroni »pobjegnu« iz njega, a da ne izazovu daljnje cijepanje. Broj neutrona sposobnih da izazivaju lančanu reakciju nazivamo multiplikacionim faktorom. Ako je on manji od jedan, radi pomanjkanja kritične količine goriva, tad se lančana reakcija gasi ili do nje uopće ne dolazi. Ako je on veći od jedan, tad lančana reakcija može poprimiti lavinski, eksplozivni karakter. Ako želimo trajno podržavati obuzdanu reakciju, tad moramo multiplikacioni faktor stalno podržavati na jedinici. Ovaj faktor možemo regulirati, ako uvlačimo u reaktor (sl. 2.) štapove kadmija *Cd*. Ovi love t. zv. neutrone lutalice i time usporuju reakciju. Peć se uz to automatski regulira i sama. Zagrijani grafit ili teška voda ne usporavaju neutrone kao kad su hladni. Time se smanjuje broj sposobnih neutrona za izazivanje reakcije eksplozivnog karaktera.



Sl. 2.

Kako ovakav reaktor predstavlja veliki izvor neutrona, to se oni koriste i za dobivanje plutonija iz $_{92}U^{238}$. Ranije objašnjenom reakcijom dobije se $_{92}Np^{239}$, koji se nakon 2,3 dana pretvara u $_{94}Pu^{239}$. Plutonij se pak kemijskim putem izdvaja iz

urana. Tako nam nuklearni reaktor služi u dvostruku svrhu. S jedne strane kao izvor toplinske energije, a s druge strane proizvodi on novo »gorivo« i materijale.

Cijepanjem ili fisijom atomskog jezgra oslobađaju se nuklearne sile, koje smo uočili kao defet mase. Danas se uspijeva ne samo cijepati, već i spajati jezgre lakših elemenata u jezgre težih. Ovo je put sinteze ili fuzije atomskih jezgara. Tako se također dobiva nuklearna energija. Ovaj postupak primjenjen je u proizvodnji vodikove bombe.

Prema jednom izvještaju, na univerzitetu u Chicagu, pomoću atomskog stroja — bevatrona — ubrzani su protoni do brzine svjetlosti i data im je energija od 6000 »meva«. Ovi protoni bačeni su na bakarnu ploču i u sudarima s atomskim jezgrama proizveli su negativne protone ili antiprotone. Oni su postojani, dok se ne sudare s materijom. U protivnom oni pretvorbom u druge oblike iščezavaju. Ova činjenica ponukat će fizičare na daljnja istraživanja, a tehničare da potraže nove načine dobivanja i korištenja nuklearne energije.

Literatura: 1, I. Supek: Teorijska fizika. 2. I. Supek: Od antičke filozofije do moderne nauke o atomima. 3. Svi članci časopisa Međunarodni problemi broj 1/955. 4. Alaga i Šips: Enrico Fermi, Priroda br. 6/955. 5. Westphal: Physik. 6. Brenneke-Poske: Physik Bd. II. 7. Hahn: Lehrbuch der Physik.

O jednoj mogućnosti pogrešnog zaključivanja

VLADIMIR DEVIDÉ, Zagreb

Poznat je niz grubih griješaka, koje može počiniti nevješti račundžija: ako obje strane neke jednadžbe »dijeli« s nulom, ako ne promijeni znak nejednakosti, kad nejednadžbu množi s negativnim brojem ili uzima recipročne vrijednosti njene lijeve i desne strane, ako ne uzme u obzir višeznačnost korijena, ako ne pazi na principijelnu ispravnost crteža iz kojeg će povlačiti zaključke o nekim geometrijskim odnosima i t. d.[1] — u svakom od tih slučajeva prekršio je neko osnovno matematičko pravilo, što mu se onda, prirodno, može osvetiti pogrešnim rezultatom. Pa čak i onda. ako je usprkos neispravnog zaključivanja došao do ispravnog rezultata — što se, dakako, također može desiti — ni onda njegov izvod time nije opravdan: pogrešno zaključivanje ostaje pogrešno.

Razmotrit ćemo u ovom člančiću malo pobliže jednu mogućnost neispravnog rasuđivanja, kojemu pogrešnost možda nije uvijek tako upadljiva, kao što je to bilo kod upravo navedenih primjera. Premda ćemo je tek na kraju (nakon što razmotrimo nekoliko konkretnih primjera) moći *u potpunosti* sagledati i razumjeti, ipak ćemo odmah ukazati na *bit* pogrešnog zaključka, o kojem želimo govoriti: taj se zaključak sastoji u tome, da se pretpostavi *postojanje* (egzistencija) rješenja nekog problema, premda matematičkim putem još nismo dokazali, da problem stvarno *ima* rješenje, a da se naknadno ne provjeri, da li je dobiveno »rješenje« zaista rješenje problema. Moguće je naime, da se iz same *pretpostavke postojanja* rješenja *ispravnim* zaključivanjem dođe do *konkretnog izraza* za rješenje, premda u stvari problem uopće *nije rješiv*. Da bismo bolje razumjeli o čemu se tu radi, razmotrimo nekoliko primjera.

1. *Pita se, koji od trokuta upisanih u danu kružnicu ima najveću površinu.*

Moglo bi se zaključivati ovako: Ako neki dani trokut *ABC nije* istostraničan, onda sigurno postoji jedna stranica — neka je to na pr. stranica *BC* — takova, da preostale dvije stranice nisu jednake (kad bi naime za svaku odabranu stranicu

[1]) Usporedi članak I. Bandića: *Pogrešno zaključivanje u matematici* u Mat.-fiz. listu God. I., br. 1,2.

preostale dvije bile jednake, trokut bi bio istostraničan). No u tom slučaju istokračni trokut *BCD* nad lukom *BC*, upisan u istu kružnicu (nacrtaj sliku!), zbog veće visine uz istu bazu *BC* svakako ima *veću* površinu od polaznog trokuta *ABC*. Odatle izlazi, da nijedan *neistostraničan* trokut *ne* može imati najveću površinu, t. j. *ne* može biti rješenje postavljenog zadatka.

Smijemo li *odatle* zaključiti, da *istostranični* trokut stvarno *ima* najveću površinu? Strogo uzevši, to nije dopustivo, ako još ne znamo, da li među trokutima, upisanim u danu kružnicu, uopće *postoji* (bar) jedan maksimalne površine. Kad bismo to dokazali, dakako da bi i gornji zaključak bio opravdan, jer ako *ima* neki trokut maksimalne površine, a mi *znamo* da on *ne* može biti *neistostraničan*, onda je to sigurno *istostranični* trokut. No, iako nas naš *geometrijski zor* želi uvjeriti, da trokut maksimalne površine mora postojati, ne smijemo taj *psihološki osjećaj* poistovjetiti s matematičko-logičkim *dokazom*. U ovom se slučaju međutim može drugim putem matematički *dokazati* postojanje traženog trokuta (zbog kratkoće prostora ne ćemo ovdje u to ulaziti) — ali *bez* takovog dokaza konačni zaključak »istostraničan trokut ima najveću površinu od svih danoj kružnici upisanih trokuta« nije opravdan.

Evo drastična primjera, koji će nam pokazati, da se stvarno ignoriranjem takove zabrane može dobiti neispravan rezultat.

2. *Pita se: Koji je najveći prirodni broj?*

Mi dobro znamo, da *ne* postoji najveći prirodni broj — no kad se na to ne bismo obazirali, mogli bi zaključivati ovako:

Ako je k bilo koji prirodni broj *veći od jedinice*, onda je k^2 još veći broj nego k. Prema tome *nijedan* od brojeva *većih* od jedinice *ne* može biti najveći. Dotle je sve u redu. No kad bismo odatle zaključili: »*dakle* je 1 najveći prirodni broj«, učinili bismo grubu pogrešku, koja je, *logički*, isto onakova, kao kad bismo u prvom primjeru (*nemajući* još dokaz postojanja najvećeg trokuta) rekli: »*dakle* je istostranični trokut najveći«. (Čitalac neka dobro uoči, da se *ne radi* o tome, da ovdje *znamo* da problem nema rješenja; u pitanju je jedino logička struktura *provedenih* zaključaka).

3. Lako je navesti i nematematički primjer *slične (ne iste!)* vrste. Iz istinitosti tvrdnje »Ivica nikad radnim danom nije bio u kazalištu« ne možemo još sa sigurnošću izvesti zaključak, da je bio u kazalištu u nedjelju, jer bi moglo biti, da on uopće ne ide u kazalište. Tek ako *znamo*, da Ivica posjećuje kazalište, smijemo onda tvrditi, da je to učinio u nedjelju.

U sva tri navedena primjera pogreška u zaključivanju je u biti iste prirode. U prvom se traži »trokut maksimalne površine upisan danoj kružnici«, u drugom »najveći prirodni broj«, u trećem »dan u sedmici, kada je Ivica bio u kazalištu« — u sva tri slučaja pokazali smo, da *svaki elemenat*, koji ulazi »u konkurenciju« za posjedovanje traženog svojstva, *osim jednog*, to svojstvo sigurno *ne posjeduje:* u prvom, da nijedan neistostranični trokut ne može biti maksimalne površine (t. j. svaki neistostranični trokut je takav, da ne posjeduje traženo svojstvo maksimalne površine) u drugom, da nijedan prirodni broj veći od jedinice nije najveći (t. j. svaki prirodni broj veći od jedinice je takav, da ne posjeduje traženo svojstvo, da bude najveći prirodni broj); u trećem, da ni jedan radni dan u sedmici nije onaj, kada je Ivica bio u kazalištu (t. j. da je svaki radni dan u sedmici takav, da »ne posjeduje svojstvo«, da je Ivica tada bio u kazalištu). No odatle ne smijemo na prečac zaključiti da *preostali* elemenat, *o kojem još nismo dokazali ništa, posjeduje* traženo svojstvo: u prvom, dok još nismo dokazali da nema u danu kružnicu upisanog trokuta, koji bi imao veću površinu od istostraničnog, ne smijemo zaključiti, da

istostraničan ima maksimalnu površinu (ako već *znamo*, da *postoji* trokut najveće površine upisan u danu kružnicu, onda *imamo* pravo tvrditi, da je to istostraničan, t. j. tada *možemo* biti sigurni da *nema* trokuta većeg od istostraničnog; inače naime ni istostranični trokut ne bi bio najveći, a za neistostranične već znamo da nisu najveći, pa onda uopće ne bi bilo najvećeg trokuta); u drugom, dok nismo dokazali da od jedinice nema većeg broja (što je dakako nemoguće dokazati, jer je takova pretpostavka pogrešna), ne smijemo zaključiti da je jedinica najveći prirodni broj; u trećem, dok još ne znamo da li nedjelja jest takav dan, da je tada Ivica bio u kazalištu, ne smijemo to, dakako, ni tvrditi. Prva dva primjera imaju pored toga i tu sličnost, da je u njima metoda konstrukcije elementa većeg od danog (t. j. u 1) prelaz od trokuta ABC na trokut BCD, u 2) prelaz od broja k na broj k^2) takova, da *zataji* kod primjene na *onaj* elemenat, za koji se na koncu nedopušteno zaključuje, da *posjeduje* traženo svojstvo maksimalnosti: u primjeru 1), ako je ABC istostraničan trokut, bit će i njemu odgovarajući istokračni trokut BCD istostraničan; u primjeru 2) za $k = 1$ vrijedi $k^2 = k = 1$. No sve to dakako još *ne* garantira, da neka *druga* metoda *ne bi* dala i od ovoga *veći* elemenat — u primjeru 2) to stvarno i *nije* tako. (Ako nam ne bi bilo stalo do te proširene sličnosti prvih dvaju primjera, mogli bi umjesto rasuđivanja iz 2) zaključivati i ovako: Od svakog prirodnog broja k većeg od jedinice postoji veći, jer je $k + 1 > k$, i t. d.)

Bilo bi lako navesti još niz primjera takove vrste; jedan od najpoznatijih javio se kod klasičnog problema: *Neka se odredi zatvorena krivulja u ravnini, koja uz dani opseg zatvara najveću površinu.* Vrlo elegantno — ali strogo uzevši nepotpuno — rješenje tog problema dao je matematičar J. Steiner. Ono je u biti preuzeto i u mnoge novije udžbenike i zbirke problema; osim u poznatim djelima: Dörrie, *Triumph der Mathematik,* Rademacher-Toeplitz, *Von Zahlen und Figuren* (u kojima je *ukazano* na nedostatak Steinerova dokaza) nalazi se na pr. i u Callandreau, *Célèbres problèmes mathématiques,* Gnedenko, *Očerki po istorii matematiki v Rossii.* U tom se rješenju (potpuno analogno kao kod našeg prvog primjera) u stvari dokazuje samo ovo: *ako* neka dana zatvorena krivulja C *nije* kružnica, onda *postoji druga* zatvorena krivulja C_1 istog opsega kao C, koja zatvara *veću* površinu nego li C. Odatle se »izvodi« zaključak, da je *kružnica* ona krivulja, koja uz dani opseg zatvara *najveću* površinu. Imamo dakle opet istu situaciju, kao u našem prvom primjeru; i tu je, doduše, konačni rezultat ispravan, ali nije ispravan način zaključivanja, kojim smo do njega došli, ako još nismo dokazali, da među krivuljama danog opsega uopće *postoji* jedna najveće površine, t. j. takova, da je ni jedna druga krivulja istog opsega površinom ne premašuje. (Uostalom, i tu vrijedi proširena sličnost sa primjerima 1) i 2) o kojoj je gore bilo govora, jer je postupak, koji se upovtrebljava, da bi se od krivulje C dobila krivulja C_1 takav, da u slučaju, kada je C kružnica, za C_1 dobivamo opet kružnicu — što, analogno kao i ranije, *samo po sebi* još *ne* garantira, da neki drugi postupak *ne bi* dao krivulju istog opsega kao kružnica, ali *veće* površine). Nadalje, ispravnost konačnog rezultata i ovdje se *može* dokazati, pa čak i bez upotrebe razrađenog aparata više matematike — no to nipošto nije tako jednostavno i kratko, kao što bi neupućeni laik u prvi mah mogao pomisliti. Ako si čitalac da truda i proradi ga na pr. iz vrlo lijepog i sustavnog prikaza u knjizi W. Blaschke, *Kreis und Kugel,* vidjet će, koliko je oštrine misli bilo potrebno da se u potpunosti savlada taj problem, i kako duboko pri tome treba poći u analizi pojmova, kojima se u zadatku barata (»krivulja«, »površina«). No bez takovog dokaza, kako god nam se na osnovu našeg geometrijskog zora činio opravdanim konačni zaključak »kružnica zatvara najveću površinu«, *matematički i logički* on *nije* dopustiv — iako ostaje elegantno heurističko sredstvo, koje nas *navodi na traženje* egzaktnog dokaza za tvrdnju, koje ispravnost *naslućujemo.*

Tip pogrešnog zaključivanja razmotren u gornjim primjerima dobro ilustrira, kako je u matematici potrebno čuvati se formalističkog[2] postupanja, kod kojeg se slijepo prihvaća neki rezultat dobiven izvjesnom tehnikom izvođenja, a ne pazi se na značenje provedenih postupaka.

Jasnoća i sigurnost razumijevanja suštine toga, zašto je razmotreni tip zaključivanja nedopustiv, može dobro poslužiti kao mjera za moć oštrog rasuđivanja čitaoca!

* * *

Uočimo još ovo: Ako je broj *n* elemenata, koji, kako smo se ranije izrazili, »ulaze u konkurenciju« za posjedovanje izvjesnog *svojstva maksimalnosti* konačan, onda poteškoća u vezi s problemom *postojanja* takovog elementa ne može nastupiti; naime ako od *n* elemenata za njih *n* — *1* znamo, da ni jedan od njih takovo svojstvo *ne* posjeduje, onda je *sigurno*, da ga *preostali* elemenat *posjeduje*, jer je od *n* veličina, koje se mogu *uspoređivati* obzirom na neki *kvantitet* (u našim primjerima površina, odnosno prirodni broj) sigurno jedna *takova*, da je ni jedna od preostalih ne premašuje. Time je ujedno opravdan zaključak da odgovarajući elemenat *ima* traženo svojstvo maksimalnosti i da *je rješenje* problema. No u *naša* prva dva primjera, kao i u slučaju problema krivulje, koja zatvara maksimalnu površinu, broj elemenata, koje treba ispitati obzirom na posjedovanje toga svojstva, *nije konačan:* u 1) postoji *beskonačno* mnogo trokuta upisanih danoj kružnici; u 2) postoji *beskonačno* mnogo prirodnih brojeva; isto tako postoji *beskonačno* mnogo zatvorenih krivulja danog opsega. A među *beskonačno* mnogo elemenata, *makar* oni i bili *uporedivi*, dakako da *ne mora* postojati najveći — kao što to, najjednostavnije, pokazuje niz prirodnih brojeva. (U trećem primjeru postoji samo *konačan* broj dana u sedmici, ali taj primjer *nije iste* vrste kao ostali, jer se tu dani u sedmici *ne* ispituju obzirom na neku njima pridruženu veličinu, koja bi se mogla *kvantitativno uspoređivati.*)

Tako su i ovdje došle do izražaja teškoće, na koje nailazimo u matematici tako često, kad razmatramo skupove od beskonačno mnogo elemenata. Njih su oštroumno uočili već starogrčki matematičari; no dok se u njihovo vrijeme »razumijevanje« beskonačnog u matematici često prepuštalo bogovima, prilazi moderna matematika toj problematici s jednog posve novog, smjelog i radikalnog stajališta. Ona uviđa, da u prirodi oko nas u stvari nigdje nema aktualne (kao *gotove* postojeće) beskonačnosti; kao što je već često bilo rečeno, priroda doduše nema »horror vacui« (strah od praznine), ali ima »horror infiniti« (strah od beskonačnosti). Operiranje s beskonačnim u matematici nije direktno preuzeto iz objektivne stvarnosti, već ga je stvorio *čovjek*, u potrebi i želji za preglednim *opisom*, za stvaranjem izvjesne *slike* ili *modela* te stvarnosti. Ono nije propisano od bogova, već je djelo ljudi. Upravo ta spoznaja, da beskonačno u matematici *nije* nešto što *samostalno* postoji, već nešto što je stvorio čovjek i za što se i sam mora pobrinuti, kako će to uskladiti s ostalim pojmovima, kojima kao matematičar barata, bila je jedan od glavnih poticaja da se razvila jedna nova nauka, *matematička logika*, koja posljednjih decenija čini jedno od najintenzivnije obrađivanih područja matematike. Po suptilnosti i ingenioznosti metoda kojima se služi, kao i po širini problematike, koju obrađuje, ona daleko premašuje sve ono, što je u mnogo stoljeća stvorila t. zv. klasična formalna logika; iako daleko od toga, da bi bila dovršena, postigla je već takovih rezultata, koji su značajni ne samo za nju samu, već i za ostalu matematiku i naučnu misao uopće.

---

[2]) Za upućenijeg čitaoca: Pojam „formalistički" ovdje dakako nije mišljen u smislu, koji ima kod *matematičko-logičkih* i *aksiomatskih* ispitivanja, gdje je *formalna* dedukcija jedina, koja se uopće dopušta.

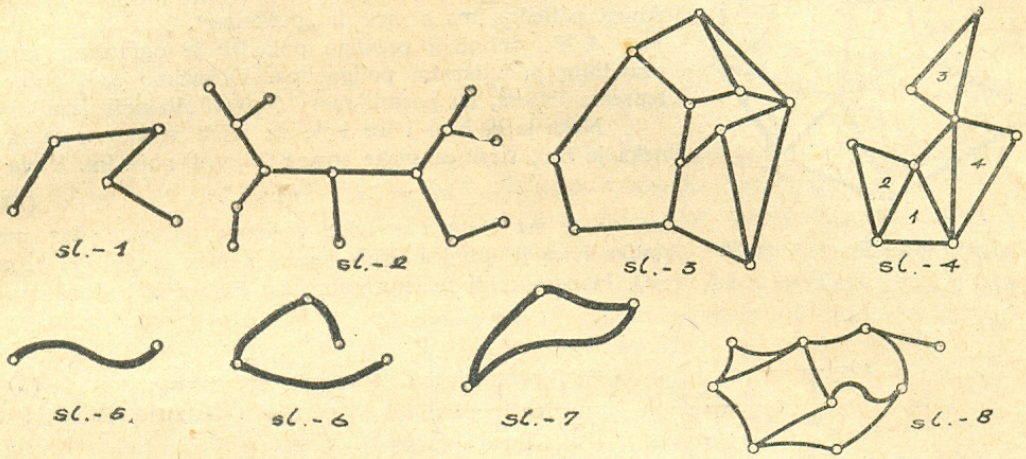
Jedna teorema Eulera i jedna njena primena

STANKO PRVANOVIĆ, Beograd

1. Svaka otvorena izlomljena linija (sl. 1) sastoji se iz k duži tj. stranica, i $k+1$ temena (u kojima se duži sastaju). Otuda, ako označimo broj temena sa t a broj stranica sa s uvek je

$$I_1 = t - s = 1.$$

To isto važi: a) za jednu duž, tj. za izlomljenu liniju od samo jedne stranice, jer kad od izlomljene linije (sl. 1) odbacimo jednu po jednu stranicu, brojevi t i s smanjuju se uvek za (isti broj) 1; b) za ma koju figuru sastavljenu od duži a koja ne zatvara deo ravni (sl. 2); c) za sve slične figure u kojima su sve ili neke stranice proste* krive linije (sl. 5 i 6).



2. Ako „slobodna“ temena (sva ili samo neka) figure kakvu prikazuje sl. 2 spojimo dužima (ili prostim krivim linijama) dobijamo figuru koja se zove mreža (sl. 3 i sl. 8). Ako broj mnogougaonih površina koje određuje mreža povećamo za 1 (za ravan izvan mreže) i tako dobiveni broj označimo sa p, nije teško videti da za svaku pravolinisku (sl. 3) ili krivolinisku (sl. 8) mrežu važi formula

$$I_2 = t - s + p = 2.$$

Na primer: na sl. 3 je $t = 11$, $s = 16$, $p = 7$ pa je $11 - 16 + 7 = 2$; na sl. 8 je $t = 9$, $s = 12$, $p = 5$ pa je, opet, $9 - 12 + 5 = 2$.

Pokažimo da ta formula važi i za trougao. Zaista, ako povučemo ma koju dijagonalu ma kog poligona mreže, povećava se i broj s (stranica) i broj p (površina) za 1, pa formula I_2 ostaje u važnosti. Pretvorimo li (dijagonalama) datu mrežu u mrežu trouglastih površina, onda je ma koji granični trougao vezan za mrežu na jedan od tri načina prikazana trouglovima 1, 2 i 3 na sl. 4. I kako se, pri izostavljanju (brisanju) ma kog od tih trouglova formula I_2 ne menja, jer kad se izostavi

trougao 1, smanjuju se brojevi s i p za 1,
trougao 2, smanjuju se brojevi t i p za 1 a s za 2,
trougao 3, smanjuje se t za 2, s za 3, p za 1,

to ona ostaje u važnosti i kad ostane samo jedan trougao (pravoliniski ili krivoliniski sl. 7).

No ona važi i za figure na sl. 1, 2, 5 i 6, jer je u tim slučajevima $p = 1$.

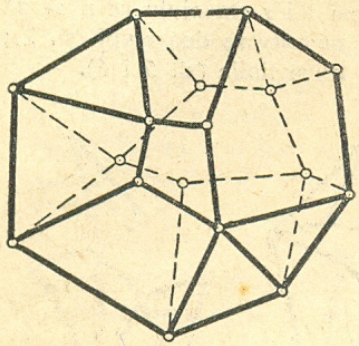
Prema tome, za ma koju figuru analognu sl. 1—8 važi formula

$$t - s + p = 2 \quad \text{odnosno} \quad t + p = s + 2,$$

koja izražava teoremu Eulera za ma koju mrežu u ravni. Nije teško utvrditi da ona važi i za (ma koju) mrežu na ma kojoj površini. No pređimo na dokaz da teorema važi i u trodimenzionom prostoru, tj. i za poliedre.

* Kriva linija je „prosta“ ako ne seče samu sebe. Na primer kriva linija nije „prosta“.

3. Posmatrajmo, jednostavnosti radi, ma koji konveksni poliedar, tj. poliedar koji se nalazi sa iste strane svake ravni kojoj pripada ma koja njegova strana. Projicirajmo takav poliedar iz jedne tačke (centra) na proizvoljnu ravan vodeći računa da se ne izgubi nijedno teme (tj. da ista projektujuća prava ne prolazi kroz dva temena). Dobivena projekcija (sl. 9) pretstavlja dve ravne mreže u istoj konturi: celo izvučena mreža je projekcija vidljivog dela tela, tačkasto — dela koji se ne vidi. Prema prethodnom, za prvu mrežu imamo $I_2' = 2$ i za drugu također $I_2'' = 2$. Međutim, kako su obe mreže obuhvaćene istom konturom, ova je računata dva puta pa zaključujemo: da i za poliedre važi teorema Eulera, tj.



sl-9

$$t - s + p = 2 \quad \text{ili} \quad t + p = s + 2,$$

gde je t broj temena, s broj ivica a p je broj strana (pljosni) datog poliedra.

Čitalac neka to proveri na njemu poznatim telima.

Razume se da teorema ne važi ako na jednoj ili više strana poliedra ima otvora ili „pukotina".

4. Po definiciji pravilan poliedar je ograničen (samo) pravilnim podudarnim poligonima. Dokažimo sad, pomoću teoreme Eulera, da postoji samo 5 pravilnih poliedara.

Neka je m broj ivica koje se stiču u isto teme, a n neka je broj stranica svake strane (pljosni) poliedra. Tada je

$$mt = 2s, \qquad np = 2s, \tag{1}$$

jer su u mt i np sve ivice poliedra računate dva puta (svaka ivica je granica dveju strana i uvek spaja dva temena). Iz poslednjih relacija i formule Eulera lako dobijamo

$$s = \frac{1}{\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2}}, \quad t = \frac{\frac{2}{m}}{\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2}}, \quad p = \frac{\frac{2}{n}}{\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2}} \tag{2}$$

Kako su s, t i p celi pozitivni brojevi, brojevi m i n (također celi pozitivni) moraju zadovoljavati uslov

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2} > 0$$

koje možemo preraditi redom ovako

$$2n + 2m - mn > 0, \quad mn - 2m - 2n < 0, \quad mn - 2m - 2n + 4 < 4$$
$$m(n-2) - 2(n-2) < 4, \quad (m-2)(n-2) < 4. \tag{3}$$

A to znači da brojevi m i n zadovoljavaju svaku od relacija

$$(m-2)(n-2) = 1, \quad (m-2)(n-2) = 2, \quad (m-2)(n-2) = 3. \tag{4}$$

I pošto svaka od njih iznosi najmanje 3, to nalazimo da relacije (4) zadovoljavaju ovih 5 parova brojeva:

$$\left|\begin{matrix} m = 3 \\ n = 3 \end{matrix}\right| \quad \left|\begin{matrix} m = 3 \\ n = 4 \end{matrix}\right| \quad \left|\begin{matrix} m = 4 \\ n = 3 \end{matrix}\right| \quad \left|\begin{matrix} m = 3 \\ n = 5 \end{matrix}\right| \quad \left|\begin{matrix} m = 5 \\ n = 3 \end{matrix}\right|$$

A tim parovima odgovaraju očigledno redom: tetraedar, heksaedar (kocka), oktaedar, dodekaedar, ikosaedar.

Uostalom kad svaki par tih vrednosti uvrstimo u (2) za s, t i p dobijamo:

s	t	p	poliedar
6	4	4	tetraedar
12	8	6	kocka
12	6	8	oktaedar
30	20	12	dodekaedar
30	12	20	ikosaedar

ZANIMLJIVOSTI I RAZNO

Probe pomoću 9

U najstarijem hrvatskom udžbeniku aritmetike, koju je pod naslovom »Arithmetika horvatszka«, izdao 1758. godine u Zagrebu Mihaly Sillobod (čitaj: Mihalj Šilobod)[1], navedena su sledeća tri primera sabiranja sa njihovim probama:

101		760	
40		456	
34		87	
175	4 × 4 proba[2]	1303	7 × 7 proba
9014			
1006			
10020			
	3 × 3 proba		

Zatim, na kraju odeljka o sabiranju, dato je sledeće uputstvo za vršenje probe sabiranja:

»Proba. Ili kazanye iztine, da fzi dobrò rachunal, biva ovak: od vfzeh brojev (v fzakoga rachunajuch kakti jedinke) koj fzu obèr linye: kulikò goder puti mores odhiti 9. kulikoti pàk zadnyi pùt ofztane, pofztavi prèd kris. Ravnò tak od oneh, koj fzu pod linyu: kuliko goder puti mores odhiti 9. kulikoti pàk zadnyi pùt ofztane: pofztavi zà kris: y akoti nikaj ne ofztane, pofztavi 0 tèr tak, ako prèd kris, y za kris jednak bròy, ali 0 dojde, dobro fzi rachunal. Ako fzamò vu czeleh devetah nifzi falel.«

I, zaista, ako saberemo, na primer, sve cifre sabiraka iz drugo navedenog sabiranja, dobićemo: $43 = 9 \cdot 4 + 7$; a ako saberemo sve cifre iz nađenog zbira, dobijamo: $7 = 9 \cdot 0 + 7$, što pokazuje da će obanađena zbira, podeljena sa 9, davati zaista ostatak 7. Sem toga to možemo konstatovati i kod dva druga navedena sabiranja, kao i kod svakog drugog pravilno izvršenog sabiranja.

No, navedeni način ispitivanja tačnosti izvršene računske operacije može se proširiti i na oduzimanje, množenje i delenje, koristeći se sledećim pravilima:

a. Ako je oduzimanje pravilno izvršeno, onda su devetični ostatak zbira cifara umanjenika i devetični ostatak zbira svih onih cifara, koji se javljaju u umanjitelju i u razlici, jednaki.

Tako će, na primer, biti:

65	$6+5=11=9\cdot1+2$
−39	$3+9+2+6=20=9\cdot2+2$
26	$2=2$

b. Ako je dato množenje pravilno izvršeno, onda je devetični ostatak zbira cifara dobijenog proizvoda jednak devetičnom ostaku zbira cifara onog broja, koji se dobije kad se devetični ostaci zbira cifara svakog od činilaca međusobno pomnože.

Tako će, na primer, biti:

$65\cdot3$	$1+9+5=15=9\cdot1+6$
195	$6+5=11=9\cdot1+2$; $3=9\cdot0+3$
	$2\cdot3=6=9\cdot0+6$
	$6=6$

c. Ako je dato delenje pravilno izvršeno, onda je devetični ostatak zbira cifara deljenika jednak devetičnom ostatku zbira cifara onog broja, koji se dobije kad se devetičnom ostatku zbira cifara proizvoda devetičnih ostataka zbira cifara delitelja i količnika doda devetični ostatak zbira cifara ostatka deljenja.

Tako će, na primer, biti:

394 : 7 = 56;	$3+9+4=16=9\cdot1+7$
44	$7=9\cdot0+7$; $5+6=11=9\cdot1+2$
2	$7\cdot2=14=9\cdot1+5$; $2=9\cdot0+2$
	$5+2=7=9\cdot0+7$
	$7=7$

P. D.

---

[1] Potpun naslov ove knjige glasi: Arithmetika horva'szka, koju za Obcinfzku vfzega Orfzaga hafzen, y potrebochu zvnogemi izebranemi Példami obilno iztolnachil, i na fzvetlo dál je: Mihaly Sillobod, drugách Eolssich, Martinszke Veszi plébanus. Zagrebiae, Typis Antoni Reiner, Inclyti Regni Croatiae, Typographi Privilegiati, Anno 1758.

Ova knjiga pretstavlja ujedno i najstariji među svim do sada nađenim matematičkim udžbenicima, pisanim na jezicima jugoslovenskih naroda.

[2] × pretstavlja u ovom slučaju znak jednakosti.

Napomena uredništva: O probama pomoću 9 kao i sličnim probama pomoću 11, već je bilo govora u našem listu. Vidi Mat. fiz. list. god. I. broj 2 str. 40 članak »O računskim pokusima«. — Tu se nalaze potanko objašnjena i dokazana sva pravila za računske pokuse pomoću 9 i 11.

Iz života velikih ljudi

Gaspar Monž beše vrlo cenjen Napoleonov pomoćnik. 1792. beše ministar mornarice, naredne godine organizira nacionalnu odbranu; učestvovao je u egipatskoj ekspediciji, bio senator, dobio plemstvo, ali padom Napoleona i on beše proganjan. On je stvarni organizator Politehničke škole i tvorac Nacrtne geometrije kao naučne discipline iako su njene osnove bile poznate. »Svi konstruktori... sećaće se sa zahvalnošću, ako znaju, ako govore jezik inženjera. Monž je taj, koji je taj jezik učinio pristupačnim svakom, koji je omogućio da on prodre u najskromnije atelje-e« veli Arago.

Monž beše dosta nastran čovek, vrlo teško je govorio, a beše strog i nepopustljiv. Kao ispitivač na prijemnom ispitu iz matematike za upis na Politehniku bio je naročito strog. — »Vi ste odbili jednog kandidata koji je iz jedne vrlo moćne porodice«, reče mu maršal De Kastri, ministar mornarice. »Vaše rešenje mi čini hiljadu nezgoda; propadoh od reklamacija«. — »Vi ste potpuno u vlasti«, odgovori Monž, »da primite kandidata kojega ja nisam mogao primiti; ali ako tako rešite, gospodine maršale, treba istovremeno da ukinete mesto koje ja zauzimam. Dužnosti koje ja vršim ne bi onda ničemu služile.« I kandidat nije bio primljen.

Dominik-Fransoa Arago, veliki Arago, jedan od najvećih naučnika devetnaestog veka, fizičar i astronom, zapažen je od rane mladosti. Sa sedamnaest godina stupi na Politehniku, primljen kao prvi. Sa dvadeset i tri godine izabran je za člana Akademije nauka.

Arago opisuje svoje polaganje prijemnog i završnog ispita na Politehnici ovim riječima:

»Moj drug, obeshrabren, potpuno propade. Kad ja posle njega pridoh ka tabli, povede se između Monža i mene ovaj čudni razgovor:

— Ako budete odgovarali kao vaš drug, nepotrebno je da vas ispitujem.

— Gospodine, moj drug zna mnogo više no što je pokazao; nadam se da ću ja biti srećniji od njega; ali to što ste mi rekli moglo bi me mnogo obeshrabriti i oduzeti mi mogućnosti odgovora.

— Stidljivost je uvek izgovor neznalica; da biste izbegli stid zbog neuspeha ja vam predlažem da vas ne ispitujem.

— Ja ne znam za veći stid od ovoga što mi vi pričinjavate sada. Izvolite me ispitivati, to je vaša dužnost.

— Vi ste suviše gordi, gospodine! Odmah ćemo videti da li je ta gordost opravdana.

— Izvolite, gospodine, ja vas čekam!

Gospodin Monž mi uputi jedno pitanje iz geometrije na koje ja odgovorih tako da oslabih njegova predubeđenja. Odatle on pređe na jedno pitanje iz algebre, na rešavanje jedne brojne jednačine. Ja sam znao Lagranžovo delo na prste...

Dva časa i četvrt bio sam kod table; g. Monž, pošto je prešao predmet od jednog kraja do drugog, dođe i zagrli me i izjavi svečano da ću ja biti prvi na listi primljenih...«

Na krajnjem, završnom ispitu na Politehnici, ispitivač je slavni matematičar Ležandr i ispit je tekao ovako:

Tek što su odneli jednog učenika potpuno onesvešćenog:

— Kako se zovete? upita me Ležandr naglo.

— Arago, odgovorih.

— Vi, dakle, niste Francuz?

Dajući mi jedno pitanje koje je zahtevalo upotrebu dvojnih integrala, on me zadrža u radu govoreći mi: »Metoda koju vi upotrebljavate nije vam data na predavanjima. Gde ste je našli?«

— U jednom vašem memoaru.

— Zašto ste baš nju izabrali? Da biste me očarali?

— Ne, to mi baš nikako nije ni na um palo. Usvojio sam tu metodu jer mi je izgledala najpogodnija.

— Ako ne uspete da mi objasnite razlog vašeg izbora, izjavljujem da ćete biti rđavo ocenjeni, bar što se tiče karaktera«...

Kad je držao predavanja iz astronomije (bio je direktor Opservatorije), Arago je naročito pazio da ga razumeju svi slušaoci. Zbog toga, u početku predavanja on gledaše po slušaocima da nađe onog čija mu fizionomija izgledaše najneinteligentnija i najgluplja, tj. koji najteže može da ga prati. Onda bi uporno gledao to lice dok primeti da ono shvata predavanje, a onda bi preneo pogled na drugo lice. I jednoga dana za vreme doručka poseti ga jedan nepoznati čovek. On se obrati profesoru: »Gospodine Arago, ja sam ushićen vašim predavanjima; ali zašto ste me onako fiksirajući gledali u toku celog časa? Izgledalo je kao da vi držite predavanje samo za mene!«

1806. g. Arago, s više naučnika, beše upućen u Španiju da produži veliki geodetski rad na merenju zemljinog meridijanskog luka, da bi se tačno odredila dužina metra, kao osnove metričkog sistema mera. Savlađujući velike teškoće rad uglavnom beše završen u 1807. g. Ali tada izbi rat između Francuske i Španije i Arago se jedva izvuče, jer ga osumnjičiše kao špijuna. On se spase presvlačeći se u seljačko odelo i podražavajući katalansko narečje, pošto i sâm beše rođen u istočnim Pirinejima.

Posle pada Luja Filipa, 1848. g. Arago beše član privremene vlade. Četiri meseca on beše ministar rata i mornarice, i za to vreme ne hte primiti nikakve ministarske prinadležnosti. Tada je on objavio dekret o ukidanju ropstva u kolonijama.

M. V. Jojić

O jednoj približnoj konstrukciji pravilnih poligona

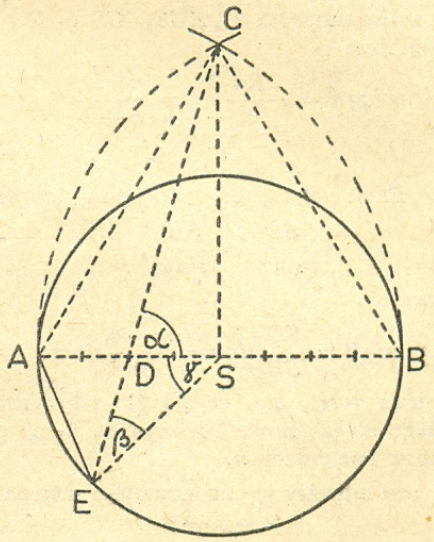
Nemački matematičar Ф. Гаус доказао је г. 1796 да се помоћу лењира и шестара могу конструисати они правилни полигони чији је број страна дат обрасцем $2^m(2^n+1)$, где су m и n цели бројеви, а 2^n+1 прост број.

Наиме у тим случајевима се страна правилног полигона може израчунати као функција полупречника описаног круга применом четири основне рачунске операције и извлачења квадратног корена.

Применом наведеног обрасца могу се лењиром и шестаром конструисати: равностран троугао ($m=0$, $n=1$), квадрат ($m=1$, $n=0$), петоугао ($m=0$, $n=2$), шестоугао $m=1$, $n=1$), осмоугао $m=3$, $n=0$), и т. д., а не могу правилни полигони са 7, 9, 11 13 страна и т. д.

У историји математике, пре Гауса, било је много покушаја да се конструишу, ма и приближно, поједини од тих полигона. Међутим, јављају се и покушаји да се постављено питање реши у најопштијем облику, т.ј. да се пронађе општа метода за конструкцију правилног полигона са n страна.

Један такав покушај налази се у делу „De resolutione et compositione mathematica, Patavii 1668“ од Карла Реналдинија (C. Renaldini).



Његова се конструкција састоји у следећем (в. слику).

При конструкцији правилног n-оугла у кругу полупречника R, описаног око центра S, треба над пречником AB, као над страном, конструисати равностран троугао ABC, затим пречник AB поделити на n једнаких делова и тачку C једном правом спојити са другим подеоком (рачунати од A). Та права сече круг у тачки E, а дуж AE треба да претставља тражену страну n-оугла.

Реналдини је ову конструкцију сматрао потпуно тачном ма да није дао одговора-

јући доказ. Колико је био сигуран у тачност добијеног резултата види се из његових речи којима завршава објашњење конструкције: „На овом проблему намучили су се старији чувени геометри, а и новији су много времена и труда узалуд уложили, ради чега очекујемо захвалност од потомства“.

Међутим, убрзо по изласку Реналдинијева дела показало се да је наведена конструкција тачна само за $n = 3$, 4 и 6.

Данас се може једино поставити питање степена тачности изведене конструкције, а то се најједноставније постиже тако што се израчуна централни угао који одговара тетиви AE и упореди са стварним централним углом одговарајућег полигона.

Означимо ли са R полупречник датог круга, имамо, према Реналдинијевом упутству,

$AD = \frac{4R}{n}$, а $SD = R - \frac{4R}{n} = R \cdot \frac{n-4}{n}$. Даље налазимо, из $\triangle ACS$, $CS = R\sqrt{3}$ и према томе

$$tg\,\alpha = \frac{R\sqrt{3}}{R \cdot \frac{n-4}{n}} = \frac{n\sqrt{3}}{n-4} \qquad (1)$$

из $\triangle EDS$ добије се, синусном теоремом

$$\frac{SD}{\sin\beta} = \frac{SE}{\sin\alpha},$$

а одатле

$$\sin\beta = \frac{SD}{SE}\sin\alpha = \frac{n-4}{n}\sin\alpha \qquad (2)$$

Према томе, ако се из (1) израчуна α, онда се из (2) може израчунати β, за разне дате вредности n.

У том случају је одговарајући централни угао $\gamma = \alpha - \beta$

Наводимо резултате за следеће вредности n.

n	γ	стварни централни угао	разлика
5	71°57′12″	72°	−2′48″
7	51°31′ 6″	51°25′43″	+5′23″
8	45°11′12″	45°	+11′12″
9	40°16′37″	40°	+16′37″
10	36°21′21″	36°	+21′21″

Из таблица се види да је отступање од праве вредности централног угла незнатно. Тако, на пример, за правилан петоугао отступање за свих пет централних углова износи 14′, дакле мање од једне четвртине степена, што значи да и код круга сразмерно малог полупречника не може ни запазити. Отуда је разумљиво што је изведена конструкција у прво време сматрана тачном.

Иван Бандић, Београд.

O jednoj teoremi matematičkih sredina

Polazeći od izraza

$$f = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$$

Prvanović[1]) je dokazao stav

$$z \leq y \leq x \qquad (1)$$

gde je x aritmetička, y geometriska i z harmoniska sredina aritmetičkih brojeva a i b.

Ovde ćemo pokazati jedan novi algoritam za dokaz stava (1).

Slučajno možemo zapaziti da iz $(a-b)^2 \geqslant 0$ sledi relacija

$$\frac{a^2+b^2}{2} \geqslant ab \qquad (*)$$

Kako se preko Schwarz-ove nejednačine[2]) dolazi do poznate majorante za aritmetičku sredinu

$$\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n} \geqslant \left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^2$$

to relacija (*) dobija oblik

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geqslant ab.$$

Odavde, neposredno sledi zaključak da je $x \geqslant y$.

S druge strane imamo sledeće. Kako je za svako aritmetičko a i b zadovoljena nejednakost $x \geqslant y$, to izlazi da je

$$a + b \geqslant 2\sqrt{ab}$$

ili

$$(a+b)\sqrt{ab} \geqslant 2ab \qquad (**)$$

---

[1]) Prvanović S, — Aritmetička, geometriska i harmoniska sredina, Mat. Fiz. list, VI. 2. 1955-56, str. 64.

[2]) Kako je uvek $f=(a_1x+b_1)^2+(a_2x+b_2)^2+\cdots(+a_nx+b_n)^2 \geqslant 0$, to jednačina $f=0$ nema realna rešenja. Iz dobivenog zaključka ($D<0$) dolazi se do Schwarz-ove nejednačine:

$$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2) - (a_1b_1+\cdots+a_nb_n)^2 \geqslant 0$$

s pretpostavkom da je $\sqrt{ab} > 0$. Pogodnim transformacijama izraza (**)

$$\sqrt{ab} \geqslant 2ab \,/\, a+b = 2 \,/\, \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \qquad (2)$$

dolazi se do zaključka da je $y \geqslant z$.

Rezultat (2) dobija oblik i preko relacije $x \geqslant y$ za slučaj recipročnih vrednosti aritmetičkih brojeva a i b, tj.

$$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2} \geqslant \sqrt{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}}$$

Kako je $x \geqslant y$ i $y \geqslant z$, to sledi dvojna nejednakost $z \leqslant y \leqslant x$ čime je stav (1) dokazan.

Dragan Trifunović, Beograd

Pripombe k notici S. Prvanovića o aritm. geom. in harm. sredini

Če k polu P na desni pristavimo ob točki A na levi simetričen P_1 pol, ki je iz slike izpadel, potem je $\overline{P_1P} = \overline{AB} + 2\overline{BP} = \overline{AB} + 2P_1\overline{A} = 2\overline{AO} + 2b = a + b = 4 + 6 = 10\ cm$. Zaradi tega je: $b + \overline{AO} = b + \overline{BO} = 2 + 3 = 5 = \frac{a+b}{2} = s_a$. Na kratko: O točka je središče med P_1 in P.

Nadalje je po znanem geometrijskem izreku produkt odsekov iz P, to je $\overline{AP} \cdot \overline{BP} = \overline{D_1P} \cdot \overline{D_1P} = \overline{D_1P^2} = ab = 16\ cm = s_g^2$,

$\overline{D_1P} = \overline{D_2P} = \sqrt{ab} = \sqrt{16} = 4\ cm = s_g$.

Po Euklidovem izreku je $\overline{D_1P^2} = \overline{OP} \cdot \overline{DP}$ ali $s_g^2 = s_a \cdot s_h$ in $s_h = \frac{s_g^2}{s_a} = \frac{ab}{\frac{a+b}{2}} = \frac{2ab}{a+b} = 3{,}2\ cm$.

Prav enako izhaja ista resnica, da so točke A, B, D, P štiri harmonične točke in je daljica $\overline{AB}$ po točki D od znotraj, po točki P pa od zunaj harmonično razdeljena. Obratno pa tudi velja, da je daljica $\overline{DP}$ po točki B od znotraj, po točki A pa od zunaj harmonično razdeljena.

K prvim celoštevilnim podatkom za: $a=40$, $b = 10$, $r = 15$ pripadajoči celoštevilni rezultati so: $s_a = 25$, $s_g = 20$, in $s_h = 16$. Drug konkreten primer je sorazmeren i t. d.

Dr. S. Dolar Ljubljana

NAZORNA SLIKA K TREM SREDINAM:

Podatki:

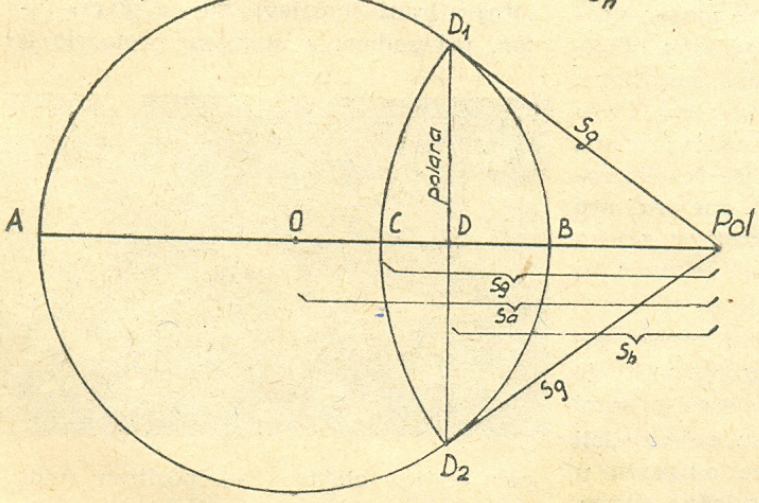
$\overline{AP} = a = 8\ cm$

$\overline{BP} = b = 2\ cm$

s_a .... aritmetična sredina

s_g .... geometrična -"-

s_h .... harmonična -"-



$s_a = \frac{a+b}{2} = 5\ cm = \overline{OP}$

$s_g^2 = ab = 16\ cm$

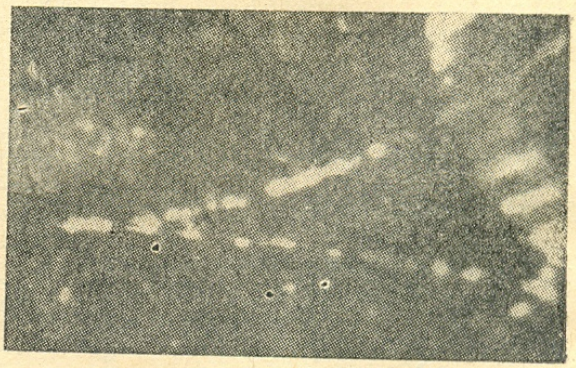
$s_g = 4\ cm = \overline{CP}$

$s_h = \frac{2ab}{a+b} = 3{,}2\ cm = \overline{DP}$

Antiproton

Do godine 1932. bile su poznate samo dvije osnovne ili elementarne čestice tvari: pozitivan proton (vodikova atomska jezgra) i negativan elektron. Premda su te dvije čestice imale jednako velike, ali suprotne električne naboje, njihove mase su se mnogo razlikovale, masa protona bila je oko 1840 puta veća od elektronske mase. Ta nesimetričnost u pogledu masa ovih dviju elementarnih čestica nametnula je pitanje: ne postoje li simetrične čestice objema poznatim elementarnim česticama, ne postoji li pozitivan elektron, t. j. čestica s masom elektrona, a nabojem jednako velikim, ali suprotnim od onog, što ga ima elektron; i, ne postoji li negativni proton ili antiproton, čestica s masom protona, ali s negativnim elementarnim nabojem? Godine 1932. otkriven je doista pozitivan elektron ili pozitron kao čestica vrlo kratkog vijeka, dakle nestabilna (jer se ubrzo susretne s negativnim elektronom, s kojim se zajedno pretvori u dva fotona). Iste je godine otkriven i neutron. Ali negativni proton nije se mogao pronaći, premda su u međuvremenu otkrivene mnoge čestice, pozitivne, negativne, a i neutralne, kojima je masa imala veličinu između one elektrona i protona, pa čak i veće od protona. Te čestice zovemo općenito mezonima; one su sve nestabilne i izvanredno kratkog vijeka (nekoliko desetmilijuntina sekunde i manje).

Kako je konačno, krajem prošle godine, ipak otkriven antiproton? On je umjetno proizveden; učenjaci su ga sami stvorili. Kako? Fizičari su se ugledali na jednu pojavu, koja se odigrava u samoj prirodi. Poznato je s jedne strane, da se svjetlost, a i žarenje općenito, sastoji iz sitnih čestica energije t. zv. fotona, kojih je energija E, prema Plancku, jednaka produktu fresvencije ν svjetlosti i jednoj konstanti, nazvanoj Planckova konstanta h, dakle: $E = h \cdot \nu$. S druge strane, poznato je, da i svaka čestica mase m predstavlja izvanredno zgusnutu energiju E golemog iznosa mc^2 (c je brzina svjetlosti u vakuumu). Ove dvije činjenice sugeriraju pitanje, da li je moguće međusobno pretvaranje fotona i elementarnih čestica. Što o tome misli teorija, što kazuje eksperiment? Teorija je tvrdila: 1) zbog održanja električnog naboja, foton se, doduše, ne može pretvoriti u jednu nabijenu česticu, ali se može pretvoriti u jedan par jednako velikih (po masi) čestica sa suprotnim nabojima; 2) da bi se foton pretvorio u par čestica, mora se sudariti s jednim atomom; 3) energija fotona $h\nu$ mora biti bar tolika, kolika je energija, što je imaju obje čestice zbog svoje mase, po Einsteinovoj relaciji $E = mc^2$. Toliko teorija; a eksperiment? Eksperiment je potvrdio pretkazivanje teorije. Snažni fotoni radioaktivnih gama-zraka, od kojih je svaki imao energiju veću, nego što je imaju dva elektrona zajedno (zbog svoje mase), pušteni su u Wilsonovu komoru. Tu su, još pred više od dvadeset godina, prvi puta zapaženi i fotografirani slučajevi, da se gama-foton, pri sudaru s atomom, pretvorio u



par čestica elektron — pozitron (vidi sliku!). Na slici razabiramo, kako se iz točke sudara gama-fotona (koji ne ostavlja nikavog traga u komori) s jednim atomom, razilaze tragovi dviju nabijenih čestica: elektrona i pozitrona, u koje se gama-foton pretvorio. (Tragovi dviju čestica zakrivljeni su na suprotne strane, jer je jako magnetsko polje, u kojem se nalazi Wilsonova komora, na taj način

zakrenulo putanje suprotno nabijenih čestica.)

Ne bi li se, možda, na sličan način, »pretvorbom« energije u masu mogao dobiti par proton — antiproton? Budući da je masa protona oko 2000 puta veća od elektronske mase, trebao bi i foton, prema Einsteinovoj relaciji, imati oko 2000 puta veću energiju od onih gama-fotona, iz kojih se stvorio par elektron-pozitron. No u prirodi tako snažnih fotona ima jedino u kozmičkim zrakama, koje iz svemira dolaze na našu Zemlju. Kako su pojave, vezane uz kozmičke zrake vrlo složene, bilo je teško sa sigurnošću ustanoviti takav proces pretvorbe. Ali su u međuvremenu sagrađeni mnogi atomski akceleratori, a među njima i najveći t. zv. bevatron u Berkeleyju u Kaliforniji. (Taj akcelerator troši toliko električne energije kao jedan grad od 100 000 stanovnika.) Upravo s ovim najvećim uređajem uspjelo je ubrzati elementarne čestice na tako izvanredno velike brzine, da je energija, što ju je svaka ubrzana čestica primila od akceleratora, daleko premašila energiju potrebnu za stvaranje para proton — antiproton. I doista, kada se snop protona tako goleme brzine i energije usmjerio na jednu bakrenu ploču, gdje su se protoni sudarili s neutronima atomskih jezgri bakra, došlo je do željene pretvorbe: iz goleme energije, što ju je proton primio od akceleratora, stvoren je novi par čestica: proton i — antiproton. Usto je svaka od nastalih čestica primila još i veliku kinetičku energiju, s kojom su izletjele iz bakrene jezgre. Budući da se kod tih reakcija, tog bombardiranja bakrenih atoma s protonima, javljaju i druge pretvorbe, pri kojima se stvaraju i različiti mezoni, moralo se najprije s pomoću elektromagneta poznate jakosti izdvojiti (otkloniti) čestice, koje su imale iste poznate veličine gibanja mv, pa se tad mjerenjem brzine različitih čestica (uz pomoć Čerenkovljevog zračenja; vidi slijedeći prikaz!), moglo iz poznate veličine gibanja i poznate brzine v naći masa m uočene vrsti čestica. Na taj se način ustanovilo, da je među registriranim česticama doista bilo i negativnih čestica s masom protona, dakle antiprotonâ. Tako su u drugoj polovici mjeseca oktobra 1955. Američka komisija za atomsku energiju i kalifornijsko sveučilište, u čijem se sastavu nalazi spomenuti bevatron u Berkeleyju, mogli objaviti otkriće antiprotona, dugo tražene simetrične čestice protona. Do otkrića je došla grupa učenjaka pod vodstvom profesora Emilia Segré-a.

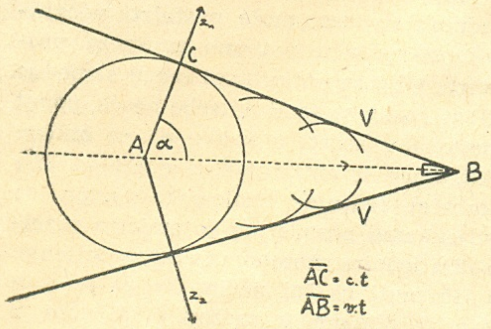
Antiproton je izvanredno nestabilan; jednom stvoren, može postojati neograničeno samo u potpuno praznom prostoru, gdje se antiprotoni mogu slobodno gibati, a da se sami od sebe ne će, poput mezona, raspasti u kakve druge oblike. Ali, dođe li antiproton u dodir sa bilo kakvim tvarnim česticama, na pr. sa stijenkama posude, on će smjesta reagirati s jednim protonom iz jezgre stijenke i iščeznuti na taj način, što će se pretvoriti dijelom u mezon, a dijelom u oslobođenu energiju.

U čemu je značenje otkrića antiprotona? Zasad se još ne može odgovoriti na to pitanje, jer još nema dovoljno podataka i iskustva s antiprotonima. Svakako je antiproton vrlo zanimljiva čestica, koja bi mogla postati i osobito sredstvo za bombardiranje jezgara, koje antiproton, zbog njegova negativnog naboja, ne će odbijati, nego privući. Ali, ne zna se još kakvi će sve rezultati proisteći iz međusobne reakcije jezgre i antiprotona, pa se prema tome ne može još ni približno znati značenje te osebujne novootkrivene elementarne čestice tvari i njene uloge u izgradnji materije. Međutim je za teoriju otkriće antiprotona važno i s jednog drugog gledišta. Ono potvrđuje zamisao, da svakoj nabijenoj elementarnoj čestici u prirodi pripada isto takva, ali suprotno nabijena čestica. Ta pravilnost bila je dosad potvrđena parom elektron—pozitron i parom pozitivnog i negativnog pi-mezona. Otkrićem antiprotona to pravilo dobiva

dalju potvrdu, čime, čini se, ono dobiva dublji smisao jedne općenite pravilnosti o simetričnosti svih elementarnih čestica u prirodi.* *A. K.*

Čerenkovljevo zračenje i njegova primjena

Kada se čvrsto tijelo, na pr. brod, giba površinom vode brzinom v većom od brzine širenja c valova vode, tada se oko broda stvori, po Huygensovu principu, val u obliku slova V (vidi sliku 1.

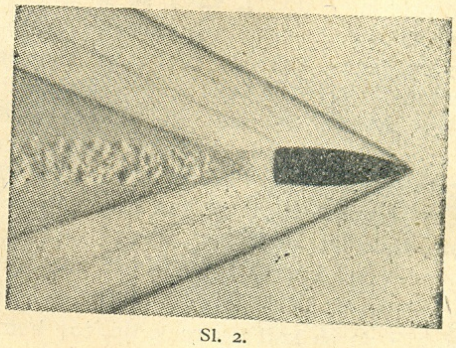


Sl. 1.

V = čelo vala, z = zraka (smjer širenja vala)). Što je brzina broda veća, bit će kut α, manji. I obratno, pri nepoznatoj brzini broda, može se iz kuta α i poznate brzine širenja vala c naći brzina v broda, budući da su te tri veličine vezane (vidi sliku!) jednostavnom relacijom $\cos \alpha = c/v$.

Istu tu pojavu samo u prostoru, trodimenzionalno, imamo kod sličnih pojava u zraku. Giba li se tijelo većom brzinom od brzine širenja valova u zraku, t. j. od brzine zvuka, na pr. tane ili avion s nadzvučnom brzinom, stvorit će se oko tog tijela val u obliku stoščevog plašta, koji u presjeku ima oblik V-vala (v. sl. 2. fotografija taneta, bržeg od zvuka, u zraku!).

Analogno opisanim slučajevima, imamo ovu pojavu. Poznato je, da se prema teoriji relativnosti, nijedno tijelo ne može gibati brzinom većom od brzine svjetlosti u vakuumu. Ali, budući da se svjetlost u različitim sredstvima širi manjim brzinama negoli u vakuumu, na pr. u vodi sa 225 000 *km/sek*, u staklu samo sa 200 000 *km/sek*, moguće je, da se elementarne čestice, na pr. elektroni, gibaju kroz takva sredstva brzinama, koje su doduše manje od brzine svjetlosti u vakuumu, ali su veće od brzine svjetlosti u tom sredstvu. U tom slučaju će se oko elektrona, koji predstavlja električni naboj u gibanju, stvoriti elektromagnetski val, koji će se širiti oko elektrona u obliku stošca u prostoru (slično onome valu kod taneta). Giba li se trajno mnogo takvih elektrona, tad će se neprestano emitirati takvi elektromagnetski valovi i mi ćemo ih moći zapaziti kao slabu svjetlost. Uistinu je najprije i bio otkriven taj fenomen svjetlosti (ruski fizičar Čerenkov, 1934), a da se nije znalo objašnjenje za njega.



Sl. 2.

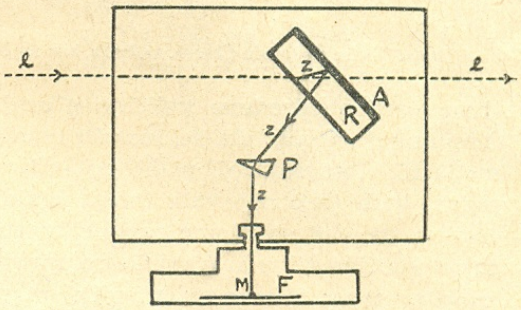
Čerenkov je pri ispitivanju poznate fluorescensije otopina soli, koje su izvrgnute utjecaju radioaktivnih gama-zraka, primijetio, da i potpuno čiste tekućine, na pr. glicerin, razni alkoholi i dr., također svjetlucaju vrlo slabom plavom i ljubičastom svjetlošću. Bilo je jasno, da se u tom slučaju ne radi o fluorescenciji. Taj efekt prozvan je Čerenkovljevo zračenje (premda ga je već pet godina

* Budući da u ovom broju donosimo tri članka dva prikaza iz područja nuklearne fizike, upućujemo naše čitaoce, koje zanima to područje, na ostale članke i prikaze iz tog područja, što ih je posljednjih godina donio naš list: *Atomska energija i njena primjena*, III. g., br. 2.; *Atomski akceleratori*, III./3.; *Kozmičke zrake*, III./1.; *Posmatranje i snimanje najsitnijih čestica* (u Wilsonovoj komori), III./4—5.; *Kako se može izračunati oslobođena energija atomske jezgre*, III./1.; *Fizika u novoj Jugoslaviji*, VI./1.; *Znameniti Millikanov ogled*, V./4.; *Robert Millikan*, (prikaz u »Zanimljivostima«) IV./3.; *Centurij, stoti kemijski element* (prikaz» u Zanimljivostima«) 4/III.—5.; *Albert Einstein*, V./4.

ranije, 1929. pronašao i opisao u radovima Francuske akademije francuski učenjak Mallet, ali se na to zaboravilo). Tek tri godine nakon Čerenkovljeva otkrića dano je objašnjenje njegova efekta na način, koji smo upravo opisali. Naime, u Čerenkovljevim eksperimentima proizveden je efekt zračenja posredovanjem radioaktivnih gama-zraka, koje su, pri sudaru s atomima čistih tekućina, iz njih izbijale elektrone, predale elektronima velik dio svoje energije, zbog čega su elektroni dobili goleme brzine, veće od brzine svjetlosti u tim tekućinama. Stoga su elektroni mogli proizvesti elektromagnetski »V-val« svjetlosti poput onog, što ga proizvodi tane s nadzvučnom brzinom u zraku i tako stvorili slabo svjetlucanje tekućine, što ga je zamijetio Čerenkov.

Slično bismo mogli s pomoću kakve katodne cijevi, ili kakvim atomskim akceleratorom ubrzati čestice: elektrone, protone, i druge, na izvanredno velike brzine, pa ih pustiti u sredstvo s manjom brzinom svjetlosti. Brzina svjetlosti u raznim sredstvima smanjuje se na veličinu $c_1 = c/n$, gdje je c brzina svjetlosti u vakuumu, a n je indeks loma tog sredstva (na pr. u vodi je $n = 1{,}33$, $c_1 = 225\,000$ *km/sek;* u staklu je $n = 1{,}5$, a $c_1 = 200\,000$ *km/sek).* Odatle se razabira, da će Čerenkovljev efekt biti to izrazitiji, što je veći indeks loma sredstva, u kome se ubrzane čestice gibaju. Tako na pr. ako je sredstvo, u kojem se proizvodi efekt — »pleksi« staklo ($n = 1{,}5$) moraju elektroni imati minimalnu energiju od 1,713 *MeV**, protoni 320 *MeV*, a alfa-čestice 1300 *MeV*, da bi postigli brzinu veću od brzine svjetlosti u »pleksi« staklu. Doista je već godine 1938. bilo eksperimentalno pokazano, da elektroni od 2 *MeV* u različitim sredstvima proizvode Čerenkovljevo zračenje, koje se moglo i fotografirati; a nedavno je uspjelo pokazati Čerenkovljev efekt i u području centimetarskih elektromagnetskih valova.

Čerenkovljevo zračenje ostalo je nekoliko godina tek jedna osebujna pojava bez primjene, ali je posljednjih godina vrlo korisno primijenjeno u nuklearnoj fizici i to kao detektor i brojač elementarnih čestica i kao sredstvo za određivanje brzine, odnosno energije tih čestica. Upravo u tom posljednjem svojstvu Čerenkovljev efekt primijenjen je pri nedavnom otkriću antiprotona (v. gornji prikaz). Stoga ćemo najprije opisati upotrebu tog efekta za određivanje brzine (energije) brzih elementarnih čestica.

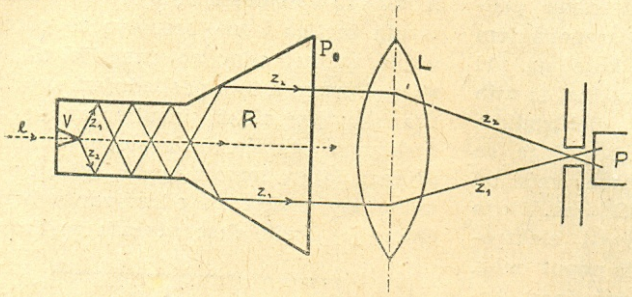


Sl. 3. Aparat za određivanje brzine (energije) čestica s pomoću Čerenkovljeva zračenja

Snop elementarnih čestica iz akceleratora (v. sl. 3!) stiže s lijeva i prodire kroz tanku stijenku posude u komoricu. Čerenkovljevo zračenje pojavljuje se pri prolazu čestica kroz staklenu ploču R velikog indeksa loma, čija je stražnja stranica prevučena tankim slojem aluminija A (koji propušta brze elektrone), da bi reflektirao nastale zrake u fotografski aparat F. Staklena ploča ima malu debljinu tako, da ne usporuje i ne raspršava brze čestice. (Prizma P korigira hromatične efekte.) Mjesto, na kojem zrake z naprave mrlju M na filmu fotografskog aparata, ovisi o kutu α emisije Čerenkovljeva zračenja, a taj kut ovisi, pri danom indeksu loma n stakla R, o brzini čestica (kako smo to pokazali u početku ovog prikaza (sl. 1.), odnosno o njihovoj kinetičkoj energiji. Prema tome, iz položaja mrlje M na filmu možemo saznati brzinu i energiju čestica, a zahvaljujući prizmi P mogu se mjerenja

* 1 *eV* = 1 *elektronvolt*, je energija, što je dobije elektron zbog ubrzanja pri prolazu kroz polje napetosti 1 *volt*. 1 *MeV* je milijun *elektronvolta*.

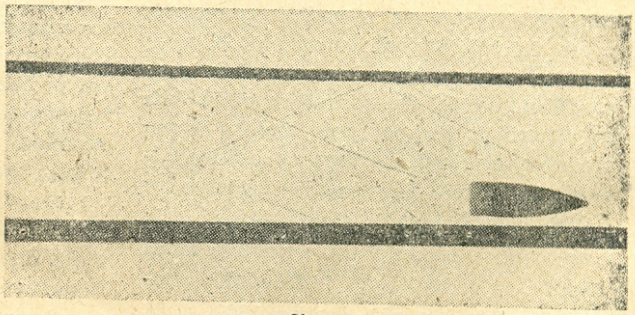
izvršiti s razmjerno velikom točnošću (na pr. za protone od 340 *MeV* može se odrediti energija na 0,8 *MeV* točno, dakle je pogreška manja od četvrt posto). Pri otkriću antiprotona, kada su jakim elektromagnetom bile odvojene negativne čestice određene veličine gibanja (impulsa) $I = mv$, bila se, između raznih mrlja na fotografskoj ploči, pojavila i takva, koja je označavala toliku brzinu čestica, da kad se njome razdijelila poznata veličina gibanja I, dobila se upravo masa protona; a kako se izdvojilo (magnetom) samo negativne čestice, bilo je jasno, da je spomenutu mrlju načinilo Čerenkovljevo zračenje, što su ga proizvele dotad nepoznate čestice — antiprotoni.



Sl. 4. Brojač čestica s pomoću Čerenk. zračenja, koji registrira do 10^{10} čestica u sek.

Isto tako nam Čerenkovljev efekt može poslužiti i kao brojač, odnosno detektor elementarnih čestica i to, kako ćemo vidjeti, kao dosad najsavršeniji brojač čestica. Uređaj u tu svrhu vidimo na slici 4. Čestica s lijeva, prodire u tijelo iz (»pleksi« stakla) R, koje će zračiti Čerenkovljevo zračenje, što ih proizvode u njemu brze čestice. Zrake Čerenkovljeve svjetlosti nekoliko se puta totalno reflektiraju (slično »čeonom« valu taneta u zraku, sl. 5.) i izlaze zatim na ravnu plohu P_0, te padnu na leću, koja ih skupi (fokusira) na fotokatodu pojačala P. Trajanje svjetlosnog impulsa, što ga proizvodi jedna čestica, određena je vremenom prolaza čestice kroz »radijator« R i brzinom svjetlosnih zraka u tom sredstvu (radijatoru). Budući da su dimenzije radijatora R svega nekoliko *cm*, vrijeme svjetlosnog impulsa Čerenkovljeve radijacije od jedne čestice ne prelazi desetmilijardinku sekunde (10^{-10} *sek*), a lako se može zamisliti, da se načini takav brojač (manjih dimenzija), gdje će impulsi trajati samo stomilijardinku sekunde (10^{-11} *sek*); takvi impulsi trajat će hiljadu puta kraće od onih, koji su dobiveni u brojačima sa scintilacijama, a koji su već mnogo brži od poznatih Geiger-Müllerovih brojača. Naime, koliko puta je kratkotrajniji impuls, toliko puta brže može brojač primiti nov impuls, dakle *odvojeno* od prvog impulsa zabilježiti drugi impuls (nove čestice). Odatle vidimo, da će novi brojači na principu Čerenkovljeva zračenja biti od velikog značenja u nuklearnoj fizici.

Napomenimo najzad, da su upotrebom



Sl. 5.

Čerenkovljeva zračenja u području kozmičkih zraka ostvareni neke vrste teleskopi, koji su sposobni da analiziraju smjerove, kojima dolaze te zrake na Zemlju. Osim toga moglo se pokazati, da jedan dio svjetlosti noćnog neba proizvode čestice, koje prolaze atmosferu s izvanredno velikim energijama.

A. K.

Tlak senjske bure

Za vrijeme studenih dana tek minule zime bjesnjela je u Senju strahovita bura brzinom od 150 *km/sat*. Bura je načinila velike štete. Čitali smo kako je potapljala čamce, brodiće pa čak i brodove na moru. Na kopnu je izvrtala vozila, rušila krovove i slabije građene objekte, a u nekoliko slučajeva odbacivala je ljude više metara daleko. Mnogi su tad zapitali, kolika je snaga te bure; može li se dovesti u vezu tlak, što ga bura proizvodi, s njenom brzinom. Doista, može!

Učenicima viših razreda bit će poznata osnovna jednadžba hidrodinamike, Bernoullijeva jednadžba, koja vrijedi za strujanje idealnih tekućina, t. j. za tekućine bez unutrašnjeg trenja (viskoznosti). Ona izražava ovisnost brzine tekućine (u cjevovodu) od tlakova u njoj:

$$p_s + \frac{1}{2}\rho v^2 = p_c, \qquad (1)$$

što znači:
statički tlak + dinamički tlak = cjelokupan tlak.

»Dinamički tlak« p_d, a to je tlak što ga tekućina vrši zbog svoje brzine, dat je u gornjoj jednadžbi izrazom:

$$p_d = \frac{1}{2}\rho v^2. \qquad (2)$$

Prema tome, ako je poznata brzina tekućine v i njena gustoća ϱ, možemo lako izračunati vrijednost dinamičkog tlaka (idealne) tekućine.

Iskustvo, eksperimenti o strujanju plinova, prije svega uzduha, pokazali su, da se plinovi, ako im brzine ne prelaze izvjesnu granicu, na pr. za uzduh 70 *m/sek*, ponašaju kao i tekućine, pa se na plinove mogu primijeniti zakoni dobiveni za (idealne) tekućine, prije svega Bernoullijeva jednadžba. Uvrstimo li, dakle, u jednadžbu (2) za $\varrho = 0{,}0013$ (gustoća uzduha), a za $v = 41{,}67$ *m/sek* $= 4167$ *cm/sek*, što odgovara maksimalnoj brzini senjske bure od 150 *km/sat*, izlazi za dinamički tlak bure:

$$p_d = \frac{1}{2} \cdot 0{,}0013 \cdot 4167^2 \; din/cm^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{0{,}0013 \cdot 4167^2}{981} \; g^*/cm^2$$

$$p_d = 11{,}5 \; g/cm^2.$$

Dakle, senjska bura, pri svojoj maksimalnoj brzini od 150 *km/sat*, tlačila je na svaki cm^2 plohe, postavljene okomito na smjer vjetra, tlakom od 11,5 g^*/cm^2, odnosno pritiskom od 1,15 kg^* na dm^2, a na 1 m^2 pritiskom od 115 kg^*. Na pr. na čovjeka, koji je bio odjenut u kabanicu, zbog čega mu je presjek, okomit na struju vjetra, iznosio oko 70 dm^2, bio bi ukupni pritisak oko 80 kg^*, što je u prosjeku više od njegove težine, kad ne bi bilo znatnih odstupanja zbog oblika tijela. Stoga je razumljivo, da je tako snažan vjetar ponio ljude i odbacio ih na udaljenost od više metara, a izvršio je i druge strahovite štete.

A. K.

ZADACI I RJEŠENJA

A) Zadaci iz matematike

192. Конструисати график квадратне функције $y = (x+1)^2 + 3x^2$ и *а*) користећи се тим графиком, дискутовати егзистенцију и знак корена једначине

$$(x+1)^2 + 3x^2 = m \qquad (1)$$

б) Одредити m уз услова:

$$\frac{x_1}{x_1+1} + \frac{x_2}{x_2+1} = m,$$

где су x_1 и x_2 корени једнакости (1).

193. Суму од A динара требало је поделити међу три лица тако да су њихови делови пропорционални бројевима: $5-a$, 5, $5+a$, где је $0 < a < 5$. Међутим подела је извршена тако да се њихови делови односе као 5, $5+a$, $5+2a$.

а) Изразити губитак или добитак сваког лица у функцији од a и A.

б) Уз претпоставку $a = 2$ једно лице је изгубило 720 динара. Колика је сума поделена?

194. Iz vrhova A, B i C trokuta i njegova težišta T povučene su paralelne dužine q, r, s i t do zadanog pravca p; dokaži, da je

$$t = \frac{q + r + s}{3}\,!$$

(Ako se dvije od točaka A, B, C i T nalaze na suprotnim stranama pravca p, duljine pripadnih paralela valja uzeti s protivnim predznacima).

195. Ako se iz vrhova A, B i C trokuta i njegova težišta T povuku do zadane ravnine π paralelne dužine q, r, s i t, dokaži, da je $t = \frac{q + r + s}{3}$! (Ako dvije od točaka A, B, C i T leže na suprotnim stranama ravnine π, valja njima pripadne dužine uzeti s protivnim predznakom).

196. Dokazati: da se preko postupaka za osobine determinanata površina trougla piše izrazom

$$2S = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)$$

gde su x_k i y_k $(k = 1, 2, 3)$ koordinate temena trougla.

197. Ako je

$$D = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^3 \end{vmatrix}$$

pokazati, da je $D = D_1(x_1 + x_2 + x_3)$, pr. čemu je D_1 Vandermonde-ova determinanta

$$(D_1 = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$$

vidi Mat. fiz. list V. 3).

198.** Izračunaj rastavljanjem na faktore i izlučivanjem zajedničkih faktora:

$$\frac{1}{a-b}\left[\frac{(a-b)^3 + (b-c)^3}{a-c} - (a + c + 2b)^2\right].$$

199.** Izračunaj rastavljanjem na faktore:

$$\frac{[ax^2 + (b-c)x - f]^2 - [ax^2 + (b+c)x - f]^2}{[ax^2 + (b+e)x - f]^2 - [ax^2 + (b-e)x - f]^2}.$$

200. Koje sve vrijednosti može poprimiti razlomak

$$\frac{x^2 - 12x + 27}{x^2 - 4x + 5}\,?$$

201. U krugu polumjera r odredi tetivu tako, da je zbroj od njezine dužine i njezine udaljenosti od središta jednak zadanoj dužini l. Diskusija!

202. Odredi istokračni trokut ABC $(AB = AC)$ upisan u krug polumjera r tako, da je zbroj $3AD + 2BC = l$, gdje je $AD = x$ visina tog trokuta. Diskusija! Uzmi u obzir, da x mora biti sadržano između 0 i $\frac{l}{3}$.

203. Neka se odrede vrijednosti od x između 0 i 2π, koje zadovoljavaju nejednadžbi

$$4\sin^2 x - 2(1 + \sqrt{3})\sin x + \sqrt{3} > 0.$$

B) Zadaci iz fizike

111. Na kosini, priklonjenoj prema horizontalnoj ravnini pod kutem $\alpha = 10^0$, stoji uspravan valjak, polumjera $r = 5$ *cm*. Koje je najveća visina v, što je smije imati valjak, a da se ne izvrne?

112*. Kamena kvadratna piramida ima visinu $v = 12$ *dm* i osnovni brid $a = 9$ *dm*, a spec. tež. joj je $s = 2{,}8$. Težište pravilne uspravne piramide nalazi se na visini $v_1 = \frac{v}{4}$ iznad središta osnovke. Pita se 1. kolika mora biti najmanja horizontalna sila P s hvatištem u vrhu piramide, koja će moći izvrnuti tijelo (oko jednog osnovnog brida); 2. za koliki kut φ moramo zakrenuti piramidu, da bi se dalje sama izvrnula; 3. kolika je radnja izvršena, dok smo piramidu zakretali za spomenuti kut φ?

113*. U otvorenoj bakrenoj posudi, teškoj 1,5 *kg**, nalazi se komad leda od 10 *kg** pri temperaturi -10^0 *C*. Pita se 1. ako se ovamo uštrca 2,5 *kg** vodenih para od 100^0 *C*, kolika će biti konačna temperatura čitavog sustava? 2. Koliko bi *kg** para od 100^0 *C* bilo potrebno dovesti, da se postigne konačna temperatura sustava 100^0 *C*? (Spec. toplina bakra = 0,09, leda 0,5, tališna toplina leda 80 *kgcal/kg*, toplina isparavanja vode 539 *kgcal/kg*.)

114. Na parnu turbinu struji svake sekunde 1 *kg* para brzinom od 750 *m/sek*. Turbina pokreće dinamostroj. Koliko će kilovata moći trajno proizvoditi dinamostroj pri napetosti 5000 *volti*, ako se u sustavu izgubi 40% energije para?

115. Žarulja od 220 *volta* troši 0,5 *ampera* i pritom ugrije 600 *g* vode u 3½ minute za $7{,}9^0$ *C*. Koliko se posto od žarulji dovedene energije pretvori u svjetlost?

C. Rješenja iz matematike

180. *Да се конструира правоаголник ABCD, страната* $AB = a$ *и* $CB = b$ *потоа* $\triangle ACE$, *симетричен со* $\triangle ABC$ *по однос на дијагоналата AC. Должината AE ја сече CD во F.*

а) Да се докажи дека $\triangle AFD$ *и* $\triangle FEC$ *се складни.*

б) Ако мерните броеви на страните a и b се рационални броеви, да се покажи дека мерните броеви на страните на триаголникот AFD образуваат продолжен однос од цели броеви.

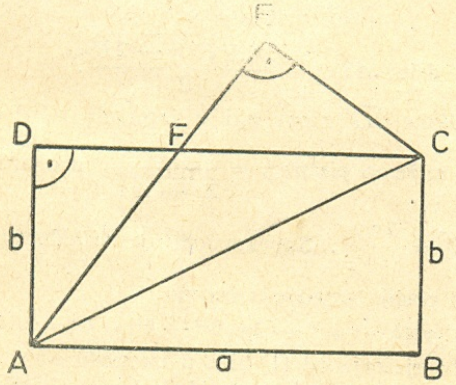
Решавање:

а) $\triangle AFD \cong \triangle CEF$ дека:

$\sphericalangle D = \sphericalangle E = 90^0$ (од симетричноста на $AD = CE$ $\triangle ACE$ со $\triangle ACB$)

$\sphericalangle AFD = \sphericalangle CFE$ (накрсни).

б) Према сликата излегува:



$DF + FC = a$ или $DF + AF = a$ . . . I и $\overline{AF}^2 = b^2 + \overline{DF}^2$ . . . II.

Ако AF од (I) го уврстиме во (II), добиваме:

$DF = \dfrac{a^2 - b^2}{2a}$. Илерува $AF = \dfrac{a^2 + b^2}{2a}$.

Значи страните на триаголникот AFD се

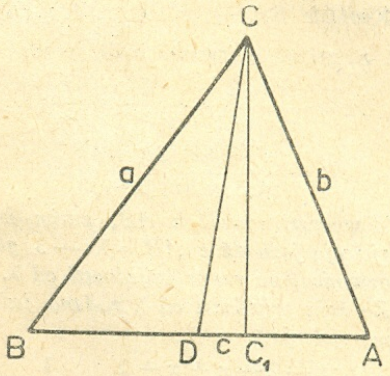
$AF = \dfrac{a^2 + b^2}{2a}$, $FD = \dfrac{a^2 - b^2}{2a}$ и $AD = b$.

Бидејќи a и b се рационални тогаш и мерните броеви на дотичниот триаголник ке се рационални.

Секој рационален број можи да се претави како однос од цели броеви. Затоа рационалните броеви можат да образуват продолжен однос од цели броеви. Према тоа мерните броеви на дотичниот триаголник можат да образуваат продолжен однос од цели броеви.

Стојановски Петар уч. 8_2 кл. г.
„Ј. Б.-Тито“ — Битола

181. *Даден е триаголникот ABC на кој страните му се* $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, *меѓу кои постои односот* $a + b = 2c$. *Ке го означиме со* C_1 *подножието на висината повлечена од C, а со D средината на страната c. Да се покажи дека* $C_1D = a - b$.



Решење:

По Карнотовата теорема:

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2c\,AC_1$$

$$AC_1 = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2c} = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{a + b}$$

$$DC_1 = \frac{a + b}{4} - \frac{c^2 + b^2 - a^2}{a + b}$$

(од $DC_1 = AD - AC_1$)

$$DC_1 = \frac{(a + b)^2 - 4c^2 - 4b^2 + 4a^2}{4(a + b)} =$$

$$= \frac{a^2 + 2ab + b^2 - (a + b)^2 - 4b^2 + 4a^2}{4(a + b)}$$

$$DC_1 = \frac{a^2 + 2ab + b^2 - a^2 - 2ab - b^2 + 4a^2 - 4b^2}{4(a + b)} =$$

$$= \frac{4(a + b)(a - b)}{4(a + b)},$$

$$DC_1 = a - b.$$

Ивановски Павле
8 р. кл. в. г. „Ј.Б.Тито“, Битола

182. *Data je jednačina*

$$x^2 - 2(m+1)x + 3m + 2 = 0$$

čiji su koreni x_1 i x_2.

a) Pokazati da postoji jedna relacija između x_1 i x_2 *nezavisna od m. Sastavite tu relaciju.*

b) Odrediti m iz uslova da je zbir korena date jednačine jednak zbiru njihovih kubova.

a) Po Viète-ovom pravilu je

$$x_1 + x_2 = 2(m + 1)$$

$$x_1 x_2 = 3m + 2.$$

Riješimo li se m dobijemo traženu relaciju

$$3x_1 + 3x_2 - 2x_1 x_2 - 2 = 0.$$

b) Iz uslova
$x_1 + x_2 = x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2]$
dobije se po Viète-ovom pravilu
$2(m+1) = 2(m+1)(4m^2 - m - 2)$ ili
$(m+1)(4m^2 - m - 3) = 0$, odakle je:

$$m_1 = -1, \quad m_2 = 1, \quad m_3 = -\frac{3}{4}.$$

Kronfeld Branko, uč. 8c r. 4. g. Zagreb

183. *Svesti na najprostiji oblik izraze*

$$A = \frac{x-2}{x(x+2} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x};$$

$$B = \frac{(x^2-4x)(2x+4)^2}{(4x^2+8x)(x-2)}.$$

a) Formirati umnožak AB, zatim ispitati znak rješenja jednadžbe $AB = \lambda x - 3$ *gdje je x nepoznanica, za razne vrijednosti od* λ.

b) Za koju vrijednost od λ *zadana jednadžba nema rješenja?*

$$A = \frac{x-2-x+x+2}{x(x+2)} = \frac{1}{x+2},$$

$$B = \frac{4x(x-4)(x+2)^2}{4x(x+2)(x-2)} = \frac{(x-4)(x+2)}{x-2}.$$

a) Tražena jednadžba bit će $\frac{x-4}{x-2} = \lambda x - 3$
ili $\lambda x^2 - 2(2+\lambda) + 10 = 0$.

$$x_1 + x_2 = \frac{2+\lambda}{\lambda}, \quad x_1x_2 = \frac{10}{\lambda}.$$

Predznak ovih funkcija isti je kao i predznak od $\lambda(2+\lambda)$, λ. $D = \lambda^2 - 6\lambda + 4$, $D > 0$ za $\lambda < 3 - \sqrt{5}$, $\lambda > 3 + \sqrt{5}$.

Načinimo preglednu tablicu, da vidimo, kako se mijenja predznak od $x_1 + x_2$, x_1x_2, pa odredimo predznake od x_1 i x_2.

λ	x_1+x_2	x_1x_2	Predznak od x_1 i x_2
-2	+	−	$x_1 < 0 < x_2 \mid x_1 \mid < x_2$
0	−	−	$x_1 < 0 < x_2 \mid x_1 \mid > x_2$
$3-\sqrt{5}$	+	+	$0 < x_1 < x_2$
$3+\sqrt{5}$			korijeni nisu realni
	+	+	$0 < x_1 < x_2$

Bistrović Matija, uč. 7.b r. kl. g. Zagreb

184. *Скрати разломак:*

$$A = \frac{(a^2+2a-1)^2 - (a^2+1)^2}{(a^2+1)^2 - (a^2-2a-1)^2}.$$

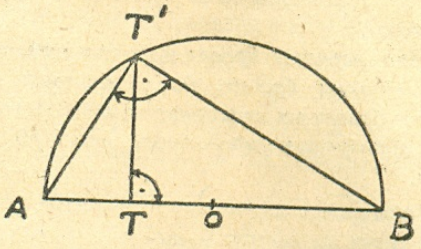
Излази

$$A = \frac{(a^2+2a-1+a^2+1)(a^2+2a-1-a^2-1)}{(a^2+1-a^2+2a+1)(a^2+1+a^2-2a-1)} =$$

$$= \frac{(2a^2+2a)(2a-2)}{(2a+2)(2a^2-2a)} = 1.$$

Мијатовић Зорка, уч. 5 р. 13 београ. г.

185. *Zadan je polukrug promjera* $AB = 2r$. *Neka je T bilo koja tačka promjera AB; okomica u T siječe kružnicu u tački T'. Neka se odredi AT tako, da je* $\overline{AT}^2 + 3\,\overline{TT'}^2 = k^2$, *gdje je k zadana dužina. Diskusija!*



Trougao ABT' je pravougli ($\sphericalangle AT'B$ je periferiski nad prečnikom) znači:
$\overline{TT'}^2 = \overline{AT}(2r - \overline{AT})$ što uvršteno u relaciju $\overline{AT}^2 + 3\,\overline{TT'}^2 = k^2$ daje poslije sređivanja:

$$2\overline{AT}^2 - 6r\,\overline{AT} + k^2 = 0 \qquad (1)$$

što daje: $\overline{AT}_{1|_2} = \frac{3r \pm \sqrt{9r^2 - 2k^2}}{2}$.

Kako $\overline{AT}$ mora biti u intervalu od 0 do $2r$ m žemo pisati: $y = \frac{\overline{AT}}{2r - \overline{AT}}$, a odavde:

$\overline{AT} = \frac{2ry}{1+y}$. Suptitucijom ove vrijednosti u (1) poslije sređivanja imamo:

$$y^2(k^2 - 4r^2) - 2y(6r^2 - k^2) + k^2 = 0 \qquad (2)$$

Oba rješenja od (1) biće u intervalu od 0 do $2r$ za one vrijednosti za koje su oba korijena (2) pozitivna. Da to bude (2) mora ispunjavati ove uslove: 1) $D \geqq 0$, 2) $S > 0$, 3) $P > 0$.

1) $D = (6r^2 - k^2)^2 - k^2(k^2 - 4r^2)$,

$36r^4 - 8r^2k^2 \geqq 0$, $k \leqq 3\frac{\sqrt{2}}{2}r$, $k \leqq 2{,}12132\ldots r$;

2) $(6r^2 - k^2)(k^2 - 4r^2) > 0$ za $2r < k < r\sqrt{6}$ t. j. $2r < k < 2{,}44949\,r$;

3) $k^2 - 4r^2 > 0$ za $2r < k$.

Odavde vidimo da zadatak ima 2 rješenja za $2r \leqq k \leqq 2{,}12132\ldots r$ (za $2r = k$ jedno rješenje je $2r$, a drugo r).

Zadatak ima jedno rješenje za $P < 0$ t. j. $k^2 - 4r^2 < 0$ ili $k < 2r$.

Ilišković Aleksandar,
uč. 8*b* r. g. Doboj.

186. *Ако је* $c^2 = a^2 + b^2$ *докажи да се израз* $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ *reducira na* $\frac{ab}{2}$, *овде је* $2s = a + b + c$.

$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} =$$

$$= \sqrt{\frac{a+b+c}{2}\cdot\frac{b+c-a}{2}\cdot\frac{a+c-b}{2}\cdot\frac{a+b-c}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(a+c-b)}{16}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(a^2+b^2+2ab-c^2)(-b^2-a^2+c^2+2ab}{16}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(c^2+2ab-c^2)(2ab-c^2+c^2)}{16}} =$$

$$= \sqrt{\frac{4a^2b^2}{16}} = \frac{ab}{2}$$ što je i potrebno dokazati.

Jeremić Dušan, uč. 7_3 p. g. Priština

187. *Izračunaj:*

$$A = \frac{\left(\frac{3a+a^3}{1+3a^2}\right)^2 - 1}{-\frac{3a^2+1}{a^3+3a}+1} : \left(\frac{9}{a^2} + \frac{-21+a^2}{3a^2+1}\right)$$

$$A = \frac{\left(\frac{3a+a^3}{1+3a^2}-1\right)\left(\frac{3a+a^3}{1+3a^2}+1\right)}{\frac{-3a^2-1+a^2+3a}{a^3+3a}} :$$

$$: \frac{27a^2+9-21a^2+a^4}{a^2(3a^2+1)} = \frac{3a+a^3-1-3a^2}{1+3a^2} \cdot$$

$$\cdot \frac{3a+a^3+1+3a^2}{1+3a^2} \cdot \frac{a^3+3a}{-3a^2-1+a^3+3a} \cdot$$

$$\cdot \frac{a^2(3a^2+1)}{a^4+6a^2+9} = \frac{(a-1)^3}{1+3a^2} \cdot \frac{(a+1)^3}{1+3a^2} \cdot$$

$$\cdot \frac{a(a^2+3)}{(a-1)^3} \cdot \frac{a^2(3a^2+1)}{(a^2+3)^2} = \frac{a^3(a+1)^3}{(1+3a^2)(a+3)}.$$

Mijatović Mirjana, uč. 6_4 p. 13 beog. g.

188. *Neka se riješi nejednadžba;*

$$\sin x + \cos x > 1$$

Iz $\sin x + \cos x > 1$ izlazi

$$\frac{2\,tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} + \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} > 1$$

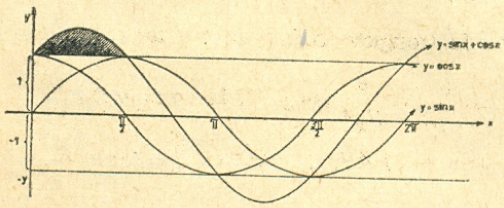
$$2\,tg\frac{x}{2} + 1 - tg^2\frac{x}{2} > 1 + tg^2\frac{x}{2}$$

$$tg^2\frac{x}{2} - tg\frac{x}{2} < 0$$

$tg^2\frac{x}{2} - tg\frac{x}{2} = 0$ za

$$\left(tg\frac{x}{2}\right)_1 = 0 \qquad x_1 = 0°$$

$$\left(tg\frac{x}{2}\right)_2 = 1 \qquad x_2 = 90°$$



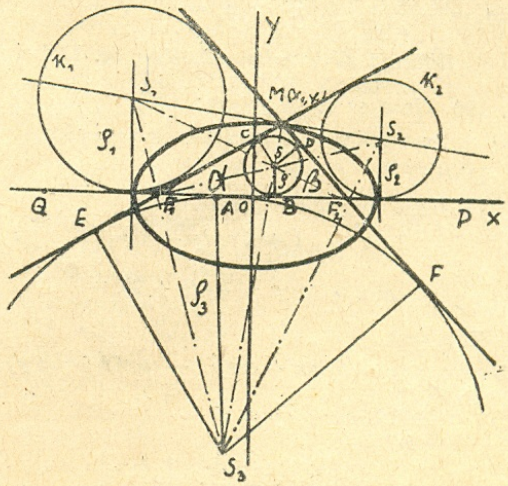
Nejednadžba $tg^2x - tg\frac{x}{2} < 0$ dakle i $\sin x + \cos x > 0$, ako je $0 < x < 90°$ i općenito $k \cdot 360° < x < 90° + k \cdot 360°$.

Varga Atila, uč. 8. r. mađ. g. Sombor

189. *Ako su α i β kutovi, što ih radiusvektori bilo koje tačke M elipse zatvaraju sa spojnicom žarišta F_1F_2 to vrijedi relacija*

$tg\frac{\alpha}{2}\,tg\frac{\beta}{2} = \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}$, *gdje je* $\varepsilon = \frac{e}{a}$ *numerički ekscentricitet elipse (vidi str. 14. u 1. broju našeg lista). Neka se dokaže, da je također*

1) $\frac{\rho}{\rho_3} = \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}$, *$\rho$ je polumjer u trokut MF_1F_2 upisane kružnice, ρ_3 polumjer dodirne, koja dira stranicu F_1F_2 izvana a produženja MF_1 i MF_2 iznutra.*



2) $\rho_1\rho_2 = b^2$, *b mala poluos elipse.*

1) Imajući u vidu da su tangente povučene iz jedne točke van kruga na krug međusobno jednake možemo pisati

$$F_1B + F_1A = F_1C + F_1E = CE,$$
$$F_2A + F_2B = F_2F + F_2D = DF.$$

Međutim, kako je

$CE = DF$ to je $F_1B + F_1A = F_2A + F_2B$

a otuda $F_1B + F_1B - AB = F_2A + F_2A - AB$

i najzad: $$F_1B = F_2A \qquad (1)$$

Iz trouglova SF_1B i S_3AF imamo $tg\frac{\alpha}{2} = \frac{\rho}{F_1B} = \frac{\rho}{F_2A}$ zbog (1). Kako je $\sphericalangle AS_3F_2 = \frac{\beta}{2}$ (jer je $\sphericalangle AF_2S_3 = 90° - \frac{\beta}{2}$) biće: $tg\frac{\beta}{2} = \frac{F_2A}{\rho_3}$. Kad ove vrijednosti za $tg\frac{\alpha}{2}$ i $tg\frac{\beta}{2}$ uvrstimo u relaciju $tg\frac{\alpha}{2}\,tg\frac{\beta}{2} = \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}$ dobićemo najzad $\frac{\rho}{\rho_3} = \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}$.

2) Budući da se simetrale uglova MF_2F_1 i MF_1Q sijeku na pravcu $x = -a$, a uglova MF_1F_2 i MF_2P na pravcu $x = a$, zatim krugovi k_1 i k_2 dodiruju x osu zaključujemo da su koordinate centara tih krugova: $S_1(-a, \rho_1)$, $S_2(a, \rho_2)$. Sem toga centri tih krugova leže na tangenti elipse povučene u tački $M(x_1, y_1)$ (jer je tangenta elipse ujedno i simetrala izvanjeg ugla radiusvektora). Stoga tangentu $b^2xx_1 + a^2yy_1 = a^2b^2$ možemo pisati: $-ab^2x_1 + a^2\rho_1y_1 = a^2b^2$ i $ab^2x_1 + a^2\rho_2y_1 = a^2b^2$ odatle: $\rho_1 = \frac{b^2(a+x_1)}{ay_1}$, $\rho_2 = \frac{b^2(a-x_1)}{ay_1}$. Kako je $a^2y_1^2 = b^2(a^2 - x_1^2)$ imaćemo:

$\rho_1\rho_2 = \frac{b^4(a^2-x^2)}{a^2y_1^2}$ ili $\rho_1\rho_2 = b^2$.

Iliškovič Aleksandar, uč. 8b r. g. Doboj

190. Neka se riješi sistem:

$\cos x + \cos y = a$, $\cos 2x + \cos 2y = b$.

Diskusija!

Iz druge jednadžbe izlazi

$$2\cos^2x - 1 + 2\cos^2y - 1 = b \quad \text{ili}$$
$$\cos^2x + \cos^2y = \frac{1}{2}(b+2).$$

Zato je

$$2\cos x\cos y = (\cos x + \cos y)^2 - (\cos^2x + \cos^2y)$$

t. j. $$2\cos x\cos y = a^2 - \frac{b+2}{2} \quad \text{i}$$

$$\cos x + \cos y = \frac{a^2}{2} - \frac{b+2}{4}.$$

Dakle su $\cos x$ i $\cos y$ korijeni jednadžbe

$$u^2 - au + \frac{a^2}{2} - \frac{b+2}{4}.$$

Oba korijena te jednadžbe moraju biti realna i sadržana između -1 i $+1$. Zato moraju biti ispunjeni ovi uvjeti:

1) $D \geqq 0$, 2) $af(-1) > 0$, 3) $af(1) > 0$, 4) $f'(-1)f'(1) < 0$, gdje je $f'(u) = 2u - a$.

$$D = a^2 - 2\left(a^2 - \frac{b+2}{2}\right) \geqq 0 \text{ za } a^2 \leqq b+2,$$

$f(-1) > 0$ t. j. $2a^2 + 4a + 2 - b > 0$ za $b < 2(a+1)^2$, $f(1) > 0$ t. j. $2a^2 - 4a + 2 - b > 0$ za $b < 2(a-1)^2$, $f'(-1)f'(1) < 0$ ili $(-2-a)(2-a)^2 = a^2 - 4 < 0$ uvijek ispunjeno, jer je a sadržano između -2 i 2. Mora dakle biti

$$a^2 - 2 \leqq b < 2(a \pm 1)^2,$$

uvjet moguć, jer je

$a^2 - 2 < 2(a \pm 1)^2$ ili $(a+2)^2 > 0$,

što je uvijek ispunjeno: b mora bit manje od manjeg od brojeva $2(a \pm 1)^2$, zato ako je

$$a > 0,\ a^2 - 2 \leqq b < 2(a-1)^2,$$

ako je

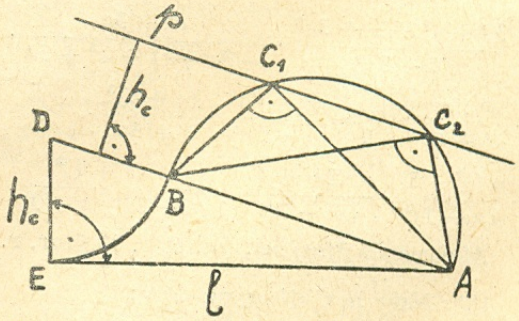
$$a < 0,\ a^2 - 2 \gtreqless b < 2(a+1)^2.$$

Ispitaj još granične slučajeve

$$f(-1) = 0,\quad f(1) = 0.$$

S. Š.

191. *Konstruisati pravougli trougao kome je zadan zbir kateta i hipotenuzina visina.*



Iz Pitagorine teoreme (ako je c hipotenuza) biće: $(a+b)^2 - 2ab = c^2$, označimo li zbir kateta $a + b$ sa l i uzmemo u obzir jednakost $ab = ch_c$ dobićemo $c^2 + 2ch_c - l^2 = 0$ t. j. $c = \sqrt{h_c^2 + l^2} - h_c$ (dolazi u obzir samo pozitivno rješenje). Znači: Prvo konstruišemo pravougli trougao sa katetama h_c i l. Zatim odbijemo h_c od hipotenuze AD. Nad razlikom $\overline{AD} - h_c = c$ opišemo kao nad prečnikom polukrug. Iza toga povučemo pravac p na udaljenost h_c od AD sa iste strane na kojoj je polukrug. Pravac siječe polukrug u tačkama C_1 i C_2. Trouglovi ABC_1 i ABC_2 podudarni su, a ujedno su i rješenja datog zadatka.

Točnost zadatka je očita iz konstrukcije i računske operacije koja joj prethodi.

Za egzistenciju trougla $ABC_{1,2}$ dovoljno je da bude: $h_c \leqq \frac{c}{2}$ t. j.

$$3h_c \leqq \sqrt{h_c^2 + l^2} \quad \text{odatle} \quad l \geqq 2\sqrt{2}\, h_c.$$

Iliškovič Aleksandar, uč. 8 b r. g. Doboj

Pravodobno riješili zadatke iz 1. broja

Gros Mladen, 5a r. kl. g. Ljubljana, 170, 178; *Hobolja Dragan*, 5a r. 2. g. Rijeka, 171, 172; *Hrvoić Ivan*, 8b r. 11. g. Zagreb, 169, 171, 177, 178; *Ljupša Danilo*, 7c r. 1. g. Maribor, 170, 171, 172, 174, 175, 177, 178; *Magaš Zdenka*, 5 r. 8. g. Zagreb 170; *Mance Miljenko*, 4b r. kl. gimn. Zagreb, 171, 172, 174, 178; *Miketinac Milivoj*, 6a r. 12. g. Zagreb, 170, 171, 172, 173; *Rajković Jusuf* 8_2 r. g. Mostar, 169, 170, 171, 172, 173; 174, 175, 178; *Šanković Branka*, 5a r. 2. g. Rijeka, 171, 172; *Šimek Lela*, 8a r. 2. osm. šk. Zagreb, 171, 172; *Todorović Dušan*, 8. r. g. Negotin, 169, 172, 173, 179; *Vujin Mileta*, 8_3 r. g. Zrenjanin, 171, 172, 173; *Zadro Mladen*, 6. r. g. Mostar 178.

Решили задатке из 2 броја

Анђелковић Боривоје, 7_2 р. г. Приштина, 181, 184, 186; *Батоћанин Милија*, 8_1 р. г. Трстеник, 181, 182. 183, 184, 186, 187, 188, 189, 190; *Бошевски Томе*, 8б кл. г. Ј. Б. Тито 180, 181, 182, 183, 184, 185, 186, 187, 188, 189, 190, 191; *Булајић Љубомир*, 7_4 р. г. Приштина 181, 184; *Булајић Слободан*, г. Ст. Сремац, Ниш, 184, 186; *Вићентић Живорад*, 4_1 р. С. т. шк. Ваљево, 180, 183, 184, 186, 187; *Георг'иевски Михајло*, 7д кл. г. Ј. Б. Тито, Битола, 181, 184, 186; *Голубовић Владимир*, 7_7 р. г. Лесковац, 180, 181, 183, 184, 185; *Дамић Вучић*,, 8 р. г. Иванград, 181, 182, 185, 188, 191; *Дејковски Витомир*, 7 кл. г. Ј. Б. Тито, Битола, 181, 184, 186, 187; *Дрешевић Милан*, 7с р. г. Бања Лука, 182, 184; *Дуњић Хранислав*, 7b р. г. Трстеник. 181, 182, 183, 184, 186, 187, 188; *Ђенадић Драгољуб*, 6_4 р. г. Прокупље, 180, 181, 184, 186, 187; *Ђукић Борисав*, 8_2 р. г. Приштина, 181; *Живић Милорад*, 8_1 разр. осм. шк. „И. Мажуранић", Београд, 186, 187; *Иванов Симеон*, 6b кл. г. Ј. Б. Тито, 184, 186, 187; *Ивановски Павле*, 8г кл. г. Ј. Б. Тито, Битола, 180, 181, 182, 184, 186, 187, 188; *Јанићин Лазар*, 8_1 г. С. Митровица, 181; *Јеремић Душан*, 7_3 р. г. Приштина, 181, 182, 183, 184, 187, 188; *Јовановић Миле*, 7_3 р. г. Врање, 180, 184; *Јованчевић Добросав*, 8 р. г. Трстеник, 180, 181, 182, 183, 184' 186, 187, 188, 189, 190; *Јосифовски Александар*, 8г кл. г. Ј. Б. Тито, Битола, 180, 182, 184, 186, 187, 188, 189; *Ђосић Миломир*, 8 р. г. Трстеник, 180, 181, 182, 184, 186, 188, 190; *Караџалиев Димитар*, г. Ј. Јосифовски, Гевгелија, 180, 181, 184; *Кашанин Радивоје*, „Рако" 8 р. г. Краљево, 181, 188, 190; *Ковач Милан*, 3 р. С. т. шк. Ваљево, 181, 184, 186, 187; *Ковијанић Предраг*, 7 р. г. Аранђеловац, 181, 182; *Коковић Миодраг*, 8_2 р. осм. шк. „И. Мажуранић", Београд, 186; *Константиновић Милован*, 5_2 р. г. Ћуприја, 184, 187; *Костић Мирослав*, 6_2 р. г. Бела Паланка 184; *Мирзиова Викторија*, 6 р. г. „Ј. Б. Тито", Битола, 184, 186, 187; *Мринковић Владимир*, 8_2 р. осм. шк. „И. Мажуранић" Београд, 186; *Маркун Ана*, 8_2 р. осм. шк. „И. Мажуранић" Београд, 186, 187; *Миланов Александар*,, 8 кл. г. Босилеград, 181, 183, 184, 185, 188, 191; *Миловановић Ђорђе*, 8_4 р. г. Крушевац, 190; *Миловски Стефан*, 8b кл. г. „Ј. Б. Тито", Битола, 180, 183, 184, 186, 188; *Мијатовић Зорка*, 5 р. 13 београ. г. 184; *Мијатовић Мирјана*, 6_4 р. 13 београ. г. 184, 186, 187; *Милић Бранислав*, 8_1 разр. г. Ћуприја, 181, 183; *Митић Доброслав*, 7_1 разр. осм. шк. „Вук Караџић", Приштина, 184; *Митровић Жарко*, 7 р. г. Врање, 181, 182, 184, 186, 187; *Михајловић Милена*, 5_1 р. г. „Св. Марковић", Ниш, 184; *Младеновић Драгиша*, 7_4 р. г. Ћуприја, 181, 184, 186; *Мудрински Војислав*, 6д р. г. „Св. Марковић", Нови Сад, 184, 186; *Милојевић Милош*, 8_1 р. г. Аранђеловац, 180, 181, 182, 183, 185, 187, 188, 191; *Нинковић Живан*, 6_2 р. г. Рума, 184; *Ножинић Душан*, 6д р. г. „Св. Марковић", Нови Сад, 184; *Павловић Василије Васо*, 8_3 разр. г. Краљево; 181; *Павловски Драгољуб*, 8а р. г. „К. Пејчиновић" Тетово, 181, 183, 184, 186, 187; *Пајић Радивоје*, 8_1 р. гимн. Трстеник, 181, 188, 190; *Перић Љубомир*, 7_4 р. г. Приштина, 181, 183, 184, 186, 188; *Поповић Љиљана*, 6_4 р. 11 беог. гимн. 181, 184, 186, 187; *Поповић Славомир*, 8 р. г. „Ст. Сремац", Ниш, 181, 182, 183, 184, 185, 186, 190; *Раденковић Драгосав*, 8_3 р. г. „Ст. Сремац", Ниш, 186, 188; *Радуловић Живота*, 8_3 р. г. Крушевац, 181, 184, 186, 187, 188; *Ратковић Томислав*, 5b р. г. Крушевац, 184, 187; *Ристић Богољуб*, 5а р. г. Младеновац, 182, 184, 186, 187; *Ристовић Миодраг*, 6_2 р. г. 11 беогр. 184; *Ристовић Мирослав*, 5_1 р. 11 беог. г. 184; *Савић Драгиша*, 7_2 р. г. Приштина, 181; *Станковић Милован*, 8_3 р. г. „Б. Станковић"

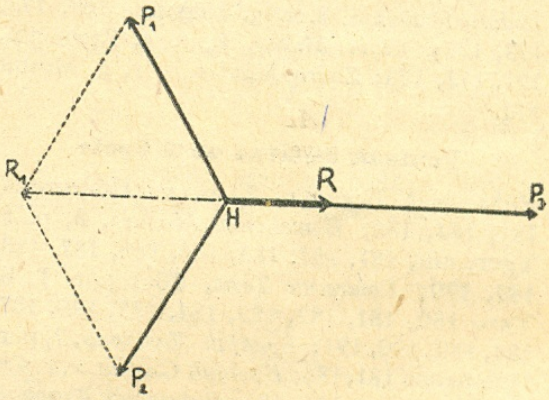
Врање, 180, 181, 182, 183, 188; *Станковић Станислав*, 8_2 р. г. Пожаревац 180 (дел.), 181, 184, 186; *Стојановски Петар*, 8 р. кл. г. Ј. Б. Тито, Битола, 180, 181, 182, 184, 187, 188, 189, 190; *Цветковић Драган*, 5а р. г. С. Митровица, 184, 187; *Чукалков Јован*, 7b р. г. Ј. Б. Тито, Битола, 184, 184; *Шајнић Данило*, Београд, 180, 181, 182, 184, 186, 188, 190; *Arandelović Vera*, priv. uč. 7c r. g. Ćuprija, 184, 186; *Bistrović Matija*, 7b r. kl. g. Zagreb, 180, 181, 182, 183, 185, 188; *Bosanac N.*, 7. r. g. Đakovo, 181; *Božičević Vladimir*, 6a r. kl. g. Zagreb, 184, 186; *Čanji Ema*, 6a r. mađ. g. Sombor, 180, 184, 186, 187; *Čolić Živko*, 7 r. g. Đakovo, 182, 188; *Čepulić Vladimir*, 6c r. kl. gim. Zagreb, 180, 181, 182, 184, 186, 187, 188; *Dobrić Dragica*, 5d r. g. Vršac, 184; *Gros Mladen*, 5a r. kl. g. Ljubljana, 184; *Hondl Olga*, 5. r. g. Ruma, 184; *Iliškovič Aleksandar*, 8b razr. g. Doboj, 181, 182, 184, 185, 186, 187, 188, 188, 190, 191; *Kalauz Vlasta*, 6c r. 9 g. Zagreb, 184 186; *Kovač Jasminka*, 5c r. 12. gimn. Zagreb, 183 (djel.); *Kovačić Zdenka*, 8 r. g. Sl. Požega, 181, 182, 183, 185, 190; *Kronfeld Branko*, 8c r. 4. g. Zagreb, 180, 181, 182, 183, 185, 188, 189, 190, 191, *Kulišić Petar*, 6a r. g. Dubrovnik, 184, 187; *Kurtaj Džemal*, 7 r. g. Peć, 184, 187; *Lojen Miroslav*, 5b r. g. Varaždin, 184, 186, 187; *Prizl Vladimir*, 8 r. g. Varaždin 181, 191; *Rački Većeslav*, 5b r g. Našice, 184; *Šimek Lela*, 2. osm. šk. Zagreb, 184; *Šimunić Bruno*, 7a r. 4. g. Zagreb 184; *Zečević Dragoljub*, 5b r. g. Doboj, 184. *Seminar za prirodne nauke* 5. r. g. Đakovo, 182, 186, 187, 188.

Ђорђевић Драгомир, 8 г. Вршац, 180. 181, 182, 183, 185 (делом.), 188, 189, 190, 191; *Ђетковић Драгиша*, 7_3 г. Крушевац, 181, 184, 186; *Марковић Сава*, 8_3 р. г. Аранђеловац, 181, 182, 183, 188, 191; *Мартиновић Радован*, 7б раз. г. Цетиње, 181, 182; *Матвеева Кира*. 6д р. г. „Ј. Б. Тито“, Скопје, 181, 184; *Ражнатовић Зарије*, 5_4 р. г. Трстеник, 180, 181; *Родић Властимир*, 1_3 уч. шк. Крушевац, 184; *Симић Драгана*, 8_3 р. г. Ћуприја, 182, 183, 184, 186, 187; *Станковић Мирослав*, 6_7 раз. г. Прокупље, 180, 181, 184, 186, 187, 190, 191; *Martinis Vinko*, 7_1 r. g. F. Višnjić, Bijeljina, 181, 182, 184, 186, 188; *Matišić Jasminka*, 6.a r. ž. g. Zagreb, 184, 186, 187; *Mihelinac Milivoj*, 6.a r. 12. g. Zagreb, 184, 186, 187; *Pašagić Husein*, 8. r. gimn. Bihać, 184, 186; *Planinc Laura*, 6.b r. 1. g. Celje, 184, 186, 187; *Umek Franciska*, 8.a r. 3. g. Ljubljana, 181, 190; *Ђорђевић Д.*, 8 р. г. Ниш, 181, 182, 183, 184, 186, 188.

D) Rješenja zadataka iz fizike

106. Tri sile, $P_1 = 40$ kg*, $P_2 = 40$ kg* i $P_3 = 60$ kg* djeluju na tijelo u njihovom zajedničkom hvatištu H. Smjerovi tih triju sila zatvaraju među sobom jednake kutove od 120°. 1) Odredite grafički i računski rezultantu tih triju sila! 2) Pod utjecajem tih sila i trenja giba se tijelo jednoliko i to 180 m u minuti; kolika je radnja izvršena u jednom satu? 3) Koliku bi snagu morao imati motor da izvrši tu istu radnju u jednako vrijeme? 4) Kad bi se taj motor upotrebljavao za dizanje vode na visinu od 2 m, koliko litara vode bi on dignuo za pola sata?*

Rješenje: 1) Rezultanta R_1 silâ P_1 i P_2 također je jednaka 40 *kg**, što izlazi iz grafičkog prikaza, budući da je R_1 prikazan stranicom istostranog trokuta. Kako sile R_1 i P_3 imaju suprotan smisao, a leže na istom pravcu, bit će konačno rezultanta R svih triju sila:



$$R = P_3 - R_1 = 60 - 40 \text{ kg*}$$
$$R = 20 \text{ kg*},$$

a smjer (pravac) i smisao od R su isti kao od sile P_3.

2) Radnja A izražena u jednom satu:

$$A = 20 \cdot 180 \cdot 60 \text{ kg*m}$$
$$A = 216\,000 \text{ kg*m}.$$

3) Snaga S bit će:

$$S = \frac{A}{t} = \frac{216\,000}{3600} \text{ kg*m/sek}$$
$$S = 60 \text{ kg*m/sek}.$$

4) Za pola sata digao bi motor, koji ima tu snagu, količinu vode od x litara na visinu od 2 m:

$$x = \frac{60}{2} \cdot 60 \cdot 30 \text{ litara} = 54\,000 \text{ l}$$
$$x = 54 \text{ m}^3.$$

Riješili: *Kosec Vladislav*, 7. r. XII. g. Ljubljana; *Šimunić Bruno*, 7.d r. IV. g. Zagreb; *Стојановски Петар*, 8 р. в. г. Битола; *Бошевски Томе*, 8 р. в. гимн. Битола (осим точ. 4); *Момировић Милан*, 7 р. г. Ћуприја; *Јеремић Душан*, 7 р. г. Приштина; *Перић Љубомир*, 7 раз. г. Приштина; *Радуловић Живота*, 8 р. г. Крушевац; *Ивановски Павле*, 8 кл. в. г. Битола; *Кашанин Радивоје*. 8 р. г. Краљево; *Митровић Жарко*, 7 р. г. Врање (осим точ. 4); *Jovančević Dobrosav*, 8 r. g. Trstenik; *Павловић Василије*, 8 р. гимн. Краљево; *Иванов Симеон*, 6 р. г. Скопје.

107. Cilindričnu epruvetu dugačku $l = 20$ cm, koja je puna zraka pod normalnim tlakom od 76 cm Hg, uronimo, s otvorom prema dolje, u široku i duboku posudu sa živom. Kako duboko ispod površine žive u posudi mora biti uronjen otvor epruvete da bi visina stupca zraka u epruveti bila samo 10 cm?*

Rješenje: Budući da se volumen zraka u unutrašnjosti epruvete smanjio za polovicu, znači, po Boyle-Mariotteovu zakonu, da je tlak na horizontalnoj plohi B dvaput veći, negoli kod A, na površini žive u posudi. To znači da je visina $\overline{AB} = 76$ cm pa je prema tome otvor C epruvete, koji se nalazi 10 cm ispod B, udaljen od površine za

$$\overline{AC} = 86 \text{ cm}.$$

Riješili: *Стојановски Петар*, 8 кл. в. г. Битола; *Kosec Vladislav*, 7. r. XII. g. Ljubljana (približno); *Радуловић Живота*, 8 р. г. Крушевац; *Gros Mladen*, 5.a r. kl. gimn. Ljubljana; *Lojen Miroslav*, 5.b r. g. Varaždin; *Павловић Василије*, 8 р. г. Краљево.

108. Prema Rutherford-Bohr-ovom modelu atoma, u vodikovom atomu kruži svega jedan negativni elektron, nabijen sa $e = 4{,}80 \cdot 10^{-10}$ cist. jed., oko pozitivno nabijene atomske jezgre (protona) s nabojem $+e$. Polumjer kružne putanje elektrona je $r = 0{,}529 \cdot 10^{-8}$ cm; omjer e/m je $5{,}27 \cdot 10^{17}$ elst. jed./g. Pita se a) kolika je kutna brzina elektrona, izražena u radijanima u sekundi; b) broj okretaja oko jezgre u sekundi; c) njegova linearna brzina; d) njegova kinetička energija (u ergima)? (Budući da proton ima 1837 puta veću masu od elektrona, zanemarujemo protonovo neznatno gibanje oko zajedničkog težišta sustava proton-elektron pri gibanju elektrona oko protona).*

Rješenje: a) Kutnu brzinu ω elektrona izračunat ćemo iz izraza:

$$\omega = \frac{v}{r}. \qquad (1)$$

Linearnu brzinu v dobit ćemo iz centripetalne akceleracije a:

$$a = \frac{v^2}{r}$$

$$v = \sqrt{ar}. \qquad (2)$$

Centripetalnu akceleraciju dobit ćemo pak iz centripetalne sile F, za koju znamo, da je, prema Coulombu, jednaka

$$F = \frac{e \cdot e}{r^2} = \frac{e^2}{r^2},$$

a akceleracija a je:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{e^2}{mr^2}; \qquad (3)$$

uvrstimo to u izraz (2):

$$v = \sqrt{\frac{e^2}{mr}}, \qquad (4)$$

a tu vrijednost uvrstimo u (1)

$$\omega = \sqrt{\frac{e^2}{mr^3}} = \sqrt{e \cdot \frac{e}{m} \cdot \frac{1}{r^3}}$$

$$\omega = \sqrt{(4{,}8 \cdot 10^{-10}) \cdot (5{,}27 \cdot 10^{17} \cdot \frac{1}{0{,}529^3 \cdot 10^{-24}}}$$

$$\underline{\omega = 4{,}14 \cdot 10^{16} \text{ radijana/sek.}}$$

b) Broj okretaja n elektrona oko jezgre bit će:

$$n = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{4{,}14 \cdot 10^{16}}{6{,}28}$$

$$\underline{n = 6{,}59 \cdot 10^{15} \text{ okretaja/sek.}}$$

c) Linearna brzina elektrona dobiva se iz (4):

$$v = \sqrt{e \cdot \frac{e}{m} \cdot \frac{1}{r}} =$$

$$= \sqrt{(4{,}8 \cdot 10^{-10}) \cdot (5{,}27 \cdot 10^{17}) \cdot \frac{1}{0{,}529 \cdot 10^{-8}}}$$

$$\underline{v = 2{,}19 \cdot 10^{8} \text{ cm/sek.}}$$

d) Kinetička energija elektrona je:

$$E = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2} m \cdot \frac{e^2}{mr} = \frac{1}{2} \frac{e}{r}$$

$$E = \frac{1}{2} \cdot \frac{4{,}8^2 \cdot 10^{-20}}{0{,}529 \cdot 10^{-8}}$$

$$\underline{E = 2{,}18 \cdot 10^{-11} \text{ erga.}}$$

Riješili: *Стојановски Петар*, 8 кл. в. г. Битола; *Jovančević Dobrosav* 8 razr. gimn. Trstenik.

109. Satno njihalo (s mjedenom šipkom) udešeno je tako, da na geografskoj širini od 45° i pri temperaturi od 15°C ima vrijeme njihaja točno 1 sekundu. Ako je linearni koeficijent rastezanja mjedi $\beta = 0{,}00002$, a akceleracija prostog pada na raznim geografskim širinama φ odre-

dena relacijom $g_\varphi = g_{45^0}\,(1 - 0{,}0026\cos 2\varphi)$, *pita se 1) koliko sekundi na dan sat zakašnjava ili požuruje pri temperaturi od 25° C; 2) na koju bi geografsku širinu trebalo odnijeti sat da pri 25° C jedan njegov njihaj traje točno jednu sekundu?*

Rješenje: 1) Na temperaturi od 25°C bit će duljina njihala l_1:

$$l_1 = l\,(1 + 0{,}00002 \cdot 10),$$

gdje je l prvobitna duljina njihala pri temperaturi od 15°C. Vrijeme njihaja t_1 bit će

$$t_1 = \pi\sqrt{\frac{l}{g}\,(1 + 0{,}0002)},$$

(g je akceleracija padanja na 45°C geografske širine). Budući da je vrijeme istog njihala pri 15°C jednaka 1 sekundi, vrijedit će relacija:

$$1 = \pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

prema tome će biti

$$t_1 = 1 \cdot \sqrt{1{,}0002}\ sek$$

$$t_1 = 1{,}0001\ sek.$$

U jednom danu (86 400 *sek*) učinit će to njihalo n njihaja:

$$n = 86\,400 : 1{,}0001$$

$$n = 86\,391 \text{ njihaj},$$

umjesto 86 400 njihaja, što znači, da će njihalo zakašnjavati za

$$\underline{\Delta t = 9\ sekundi}$$

2) Da bi vrijeme njihaja našeg njihala iznosilo točno jednu sekundu pri 25°C, morali bismo ga odnijeti na geografsku širinu φ, koja bi morala ispuniti relaciju:

$$1 = \pi\sqrt{\frac{l_1}{g_\varphi}} = \pi\sqrt{\frac{l\,(1 + 0{,}0002)}{g\,(1 - 0{,}0026 \cdot \cos 2\varphi)}} =$$

$$= 1 \cdot \sqrt{\frac{1 + 0{,}0002}{1 - 0{,}0026 \cdot \cos 2\varphi}}$$

$$1 - 0{,}0026\cos 2\varphi = 1 + 0{,}0002$$

$$\cos 2\varphi = -\frac{1}{13}$$

$$\underline{\varphi = 47^\circ 12' 21''.}$$

Riješili: *Стојановски Петар*, 8 кл. в. г. Битола; *Бошевски Томе*, 8 кл. в. г. Битола; *Šimunić Bruno*, 7. d r. IV. g. Zagreb (djelomično); *Кашанин Радивоје*, 8 р. г. Краљево (деломично); *Jovančević Dobrosav*, 8 r. gimn. Trstenik; *Датић Вучић*, 8 р. г. Ивангрaд (дел.); *Илишковић Александар*, 8 р. г. Добој.

110. Na jednoj zdjelici A obične vage nalazi se posuda C s vodom, a na drugoj zdjelici B vješalica, na čijem je jednom kraju privezano tijelo D potpuno uronjeno u vodu, ali tako da ne dotiče dno posude C. Tarom na zdjelici B uspostavi se ravnoteža na vazi. 1) Ako produljimo nit na kojoj visi tijelo D tako, da ono padne na dno posude, pita se a) da li će biti poremećena ravnoteža na vazi (ima li i iznimaan slučaj); b) ukoliko se ravnoteža poremeti, koliki ćemo uteg (izražen općenito težinom P tijela i njegovom specifičnom težinom s, morati staviti na vagu, i to na koju zdjelicu, želimo li, da ostane ravnoteža na vazi? — 2) Ako pak skratimo nit, na kojem je tijelo visilo uronjeno u vodu, tako, da čitavo tijelo visi iznad vode u posudi, pa ako tad za uspostavljanje ravnoteže moramo dodati na zdjelicu A svega 6,4 g da bi se ponovo uspostavila ravnoteža, pita se kolika je spec. težina obješenog tijela D, teškog P = 24,64 g*?*

Rješenje: Volumen tijela u cm^3 je $V = \frac{P}{s}$; to je ujedno i uzgon tijela u vodi izražen u *gramima**. Na zdjelici B djeluje težina T vješalice i tare, te prividna težina tijela $P - \frac{P}{s}$. Na zdjelicu A djeluje težina Q posude s vodom i uzgon $\frac{P}{s}$. Dakle, za slučaj ravnoteže imamo:

$$Q + \frac{P}{s} = T + \left(P - \frac{P}{s}\right).$$

Odatle izlazi:

$$T = Q - P + \frac{2P}{s}. \qquad (1)$$

1. *a*) Ako tijelo spustimo na dno posude s vodom, djelovat će na zdjelicu B samo težina T vješalice i tare, a na zdjelicu A težina posude Q i težina tijela P. To znači, da u tom slučaju ne će biti ispunjen uvjet ravnoteže (1). Prema tome spuštanjem tijela na dno posude, bit će prvobitna ravnoteža poremećena. Zdjelica A će prevagnuti, jer je

$$Q + P > Q - P + \frac{2P}{s},$$

uz pretpostavku: $s > 1$.

Iznimku bi činio slučaj, kad bi tijelo imalo takvu specifičnu težinu, da bi vrijedila relacija

$$P = -P + \frac{2P}{s},$$

jer bi u tom slučaju bilo

$$Q + P = Q - P + \frac{2P}{s}.$$

Iz relacije

$$P = -P + \frac{2P}{s}$$

izlazi, da bi specifična težina s uronjenog tijela morala biti jednaka 1, dakle jednaka spec. tež. vode. Razumljivo je samo po sebi, da bi tad bilo svejedno, da li je tijelo privezano na vješalicu ili ne, jer bi ono u vodi lebdjelo.

b) Da bismo uspostavili ravnotežu, treba udesiti težinu Q_1 posude s vodom na zdjelici A tako, da težina T tare i vješalice na B bude prema jednadžbi (1), jednaka,

$$T = Q_1 - P + \frac{2P}{s}$$

a to znači da od zdjelice A moramo oduzeti razliku između sadašnje težine $Q + P$ (kad je tijelo spušteno na dno) i one prvobitne

$$Q - P + \frac{2P}{s},$$

dakle moramo oduzeti (na pr. odlijevanjem vode iz posude) težinu ΔQ

$$\Delta Q = (Q + P) - \left(Q - P + \frac{2P}{s}\right) = 2\left(P - \frac{P}{s}\right)$$

$$\Delta Q = 2P \cdot \frac{s-1}{s}. \qquad (2)$$

2. Kad skratimo nit tako, da tijelo stoji izvan vode, tad u B djeluje težina $T + P$, a u A težina Q posude s vodom. Da bude ravnoteža, moraju te težine ispuniti jednadžbu (1)

$$T + P = Q + \frac{2P}{s};$$

prema tome, treba na zdjelici A dodati težinu $\frac{2P}{s}$, a ta je prema zadatku jednaka 6,4 g^*:

$$\frac{2P}{s} = 6{,}4$$

odakle izračunamo traženu vrijednost za spec. tež. tijela

$$s = \frac{2P}{6{,}4} = \frac{2 \cdot 24{,}64}{6{,}4}\ g^*/cm^3$$

$$s = 7{,}7\ g^*/cm^3.$$

Riješili: *Стојановски Петар*, 8 кл. в. г. Битола; *Бошевски Томе*, 8 кл. в. г. Битола; *Kosec Vladislav*, 8. r. XII. g. Ljubljana (djelomično); *Lojen Miroslav*, 5.b r. g. Varaždin; *Gros Mladen*, 5.a r. kl. g. Ljubljana (djelomično); *Иванов Симеон*, 6 а раз. г. Скопје.

Naknadno, na vrijeme stigla rješenja iz fizike:

Петрићевић Верица, 7 р. в. г. Врање, зад. 101; *Gros Mladen*, 5. a raz. kl. g. Ljubljana, zad. 101; *Јеремић Душан*, 7 р. г. Приштина; *Перић Љубомир*, 7 р. г. Приштина (деломично); *Ивановски Павле*, 8 раз. г. Битола (деломично).

Vježbe iz matematike za učenike 5.—8. raz. gimn. i sličnih škola

Linearne Diofantove jednadžbe

a) Ako su a, b i c cijeli brojevi, jednadžba se $ax + by = c$ zove *linearna Diofantova jednadžba* s dvije nepoznanice, ako se traže samo cjelobrojne vrijednosti nepoznanica x i y, koje zadovoljavaju tu jednadžbu.

Na pr. Jednadžba $503x - 156y = 11$ kao Diofantova jednadžba ima rješenje $x = 85$, $y = 274$, ali i rješenje $x = -539$, $y = -1738$, i mnogo drugih.

Ima li svaka linearna Diofantova jednadžba s dvije nepoznanice rješenje? Očito je, da na pr. jednadžba $6x - 2y = 5$ nema rješenja u cijelim brojevima, jer je za cjelobrojne vrijednosti nepoznanica lijeva strana djeljiva sa 2, a desna nije. Uopće: ako u jednadžbi $ax + by = c$ broj c nije djeljiv najv. zajed. mjerom brojeva a i b, jednadžba nema rješenja u cijelim brojevima.

Predočimo takvu jednadžbu, na pr. $6x - -2y = 5$, u koordinatnom sistemu (x, y), u kojemu su istaknute točke s cjelobrojnim koordinatama! Grafička slika naše jednadžbe je pravac p; produljen u beskonačnost na obje strane, on ne zgađa nijednu istaknutu točku.

b) Budući da je svako rješenje jednadžbe $ax + by = c$ ujedno rješenje i jednadžbe

$$akx + bky = ck$$

i obrnuto, svaku jednadžbu $ax + by = c$, u kojoj je c djeljiv s $M(a, b)$, možemo zamijeniti drugom, u kojoj su koeficijenti nepoznanica relativno prosti brojevi.

c) Ima li jednadžba $ax + by = c$ jedno rješenje, onda ona ima beskonačno mnogo rješenja. Na pr. jednadžba $3x - 2y = 7$ ima rješenje $x_1 = 3$, $y_1 = 1$. Grafička slika te jednadžbe je pravac q; on prolazi točkom $M_0(3, 1)$, ali i svakom točkom $M_u(3 + 2u, 1 + 3u)$, gdje je u cio broj (gl. sliku!) Doista je

$$3(3 + 2u) - 2(1 + 3u) = 7.$$

Ima li dakle jednadžba $ax + by = c$ jedno rješenje (x_1, y_1), njezino je opće rješenje

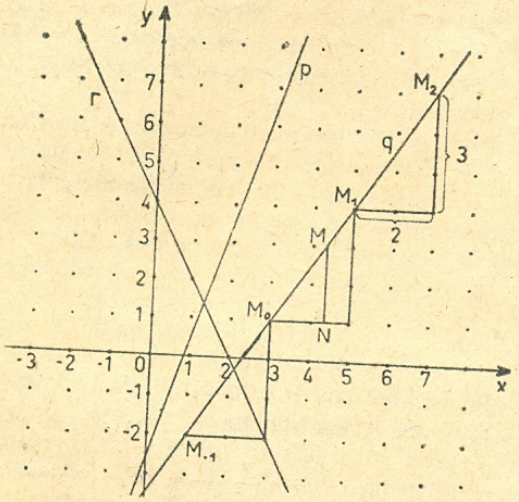
$$x = x_1 - bu, \quad y = y_1 + au,$$

gdje je u cio broj, jer iz $ax_1 + by_1 = c$ izlazi

$$a(x_1 - bu) + b(y_1 + au) = ax_1 + by_1 = c.$$

Ako su a i b relativno prosti brojevi, općim su rješenjem određena sva rješenja jednadžbe $ax + by = c$. U našem su primjeru razlike koordinata svakih dviju susjednih točaka M_u, na pr. M_0 i M_1 $b = 2$ i $a = 3$; između njih ne može ležati nijedna točka M pravca q s cjelobrojnim koordinatama, jer nema cijelih brojeva $M_0N < b$ i $MN < a$, tako da bi bilo $\frac{MN}{M_0N} = \frac{a}{b}$, jer je $\frac{a}{b}$ reduciran razlomak.

d) Ako su a i b jednako predznačeni, onda jednadžba $ax + by = c$ može imati samo konačan broj rješenja, u kojima su x i y jednako predznačeni, jer samo konačni dio pravca



$ax + by = c$ leži u I. ili III. kvadrantu (u slici pravac $r \equiv 2x + y - 4 = 0$); jednadžba $2x + y = 4$ ima samo jedno takvo rješenje $x_1 = 1$, $y_1 = 2$, ako se izuzmu rješenja (2, 0) i (0, 4), dok rješenja s protivno predznačenim x i y ima beskonačno mnogo, jer beskonačni dijelovi pravca r leže u II. i IV. kvadrantu.

Ako su a i b nejednako predznačeni, jednadžba $ax + by = c$ može imati samo konačan broj rješenja, u kojima su x i y protivno predznačeni (gl. pravac $q \equiv 3x - 2y - 7 = 0$!).

e) Ako jednadžba $ax + by = 1$ ima rješenje (x_1, y_1), onda jednadžba $ax + by = c$ ima rješenje $x = cx_1$, $y = cy_1$, jer iz $ax_1 + by_1 = 1$ množenjem sa c izlazi $acx_1 + bcy_1 = c$.

Poučak: Ako su a i b relativno prosti brojevi, jednadžba $ax + by = 1$, pa prema tome i jednadžba $ax + by = c$ ima beskonačno mnogo rješenja u cijelim brojevima.

Ako su a i b relativno prosti brojevi, pa ih razdijelimo verižno, pretposljednji ostatak je 1; kako su kvocijenti cijeli brojevi, svi se ostaci, dakle i 1, mogu prikazati u obliku $ma + nb$, gdje su m i n cijeli brojevi. Iz $ma + nb = 1$ izlazi, da je (m, n) jedno rješenje jednadžbe $ax + by = 1$, a (mc, nc) jednadžbe $ax + by = c$.

1. primjer. $37x + 10y = 417$.

Rješenje: Razdijelimo 37 s 10 verižno do ostatka 1! Stavimo sad $a = 37$, $b = 10$,

37	10	3
7	3	1
1		2

a	b	
$+ \quad 3b$	$+ a - 3b$	3
$-$	$- \quad +$	
$a - 3b$	$-a + 4b$	1
$-2a + 8b$		2
$+ \quad -$		
$3a - 11b$		

pa razdijelimo verižno a sa b s pomoću dobivenih kvocijenata 3, 1, 2! Nalazimo, da je $a - 3b = 7$, $-a + 4b = 3$, $3a - 11b = 1$, i prema tome je $(3, -11)$ jedno rješenje jednadžbe $37x + 10y = 1$; doista je $37 \cdot 3 + 10 \cdot (-11) = 111 - 110 = 1$. Jedno rješenje jednadžbe $37x + 10y = 417$ je $x = 417 \cdot 3 = 1251$, $y = -417 \cdot 11 = -4587$, a opće $x = 1251 - 10u$, $y = -4587 + 37u$. Da x i y budu pozitivni, mora biti:

$$1251 - 10u > 0 \qquad -4587 + 37u > 0$$
$$1251 > 10u \qquad 37u > 4587$$
$$u < 125{,}1 \qquad u > 123{,}9\ldots$$

t. j. $u = 124$ ili 125; ta su rješenja (11,1) i (1, 38).

2. primjer. $19x - 64y = 25$.

19	64	3
5	7	2
1	2	1
		2

a	b	
$- \quad 6a + 2b$	$+ \quad 3a$	3
$+ \quad -$	$- \quad -$	
$7a - 2b$	$-3a + b$	2
$-20a + 6b$	$+ \quad 7a - 2b$	1
$+ \quad -$	$- \quad +$	
$27a - 8b$	$-10a + 3b$	2

Nalazimo, da je (27, 8) jedno rješenje jednadžbe $19x - 64y = 1$, i prema tome

$$x = 27 \cdot 25 = 675,\ y = 8 \cdot 25 = 200$$

jedno rješenje jednadžbe $19x - 64y = 25$, a opće je $x = 675 + 64u$, $y = 200 + 19u$. Pozitivnih rješenja ima ta jednadžba beskonačno mnogo, a najmanje je (35, 10), koje se dobije iz općeg za $u = -10$.

f) Pokazat ćemo na primjeru, kako se može riješiti sistem od dvije Diofantove jednadžbe s 3 nepoznanice.

Riješi u cijelim brojevima sistem

$$4x - 5y + 7z = 2$$
$$3x + 18y - 14z = 1.$$

Ako prvu jednadžbu pomnožimo s 2 i jednadžbe zbrojimo, dobivamo jednadžbu $11x + 8y = 5$; opće rješenje te jednadžbe je $x = 15 - 8u$, $y = -20 + 11u$. Supstitucijom u

prvu zadanu jednadžbu izlazi $87u - 7z = 158$; opće je rješenje te jednadžbe $u = -316 + 7v$, $z = -3950 + 87v$. Uvrstivši izraz za u u izraze za x i y, dobivamo opće rješenje sistema: $x = 2543 - 56v$, $y = -3496 + 77v$, $z = -3950 + 87v$. Po apsolutnoj vrijednosti najmanje rješenje sistema je:

$$x = 23,\ y = -31,\ z = -35.$$

Račun je jednostavniji, ako se iz jednadžbi izluči ona nepoznanica, kojoj su koeficijenti relativno prosti brojevi, na pr. x u zadanom sistemu. Dobiva se jednadžba $-87y + 77z = 2$; opće je rješenje te jednadžbe: $y = 46 + 77u$, $z = 52 + 87u$. Kad te izraze uvrstimo u prvu jednadžbu, reduciramo i skratimo sa 4, izlazi $x = -33 - 56u$. Za $u = -1$ izlazi kao gore: $x = 23$, $y = -31$, $z = -35$.

Zadaci. Nađi opće rješenje ovih Diofantovih jednadžbi:

1) $21x + 13y = 47$; 2) $11x + 48y = 7$;
3) $503x - 156y = 11$; 4) $97x - 121y = 10$;
5) Riješi u pozitivnim cijelim brojevima: *a*) $7x + 13y = 60$; *b*) $33x + 23y = 2002$.
6) Koji cijeli brojevi između 10 i 100 zadovoljavaju jednadžbu $25x - 7y = 576$?
7) Koji troznamenkasti broj razdijeljen sa 17 daje ostatak 14, a razdijeljen s 32 daje ostatak 8?
8) Tri radnika, radeći svaki sam, svršili bi posao: prvi za 14, drugi za 15, a treći za 20 radnih dana, a svršili su ga ovako: 1. i 2. radnik radili su nekoliko dana zajedno, zatim 2. i 3. nekoliko dana zajedno, a onda je radio 1. radnik sam $1\frac{2}{3}$ dana. Koliko su dana radili 1. i 2. radnik zajedno, a koliko 2. i 3?
9) Riješi u cijelim brojevima ove sisteme: *a*) $9x - 4z = -1$, $7x + 5y = 101$; *b*) $11x + 8y - 13z = -1$, $19x - 40y + 11z = -15$; *c*) $15x - 17y - 14z = 1$, $-12x + 25y + 7z = 2$.

Rezultati: 1) $x = 235 - 13u$, $y = -376 + 21u$; 2) $x = -91 + 121u$, $y = 21 - 11u$; 3) $x = -539 + 156u$, $y = -1738 + 503u$; 4) $x = 50 + 121u$, $y = 40 + 97u$; 5) *a*) $x = 3$, $y = 3$; *b*) (53, 11), (30, 44), (7, 77); 6) (32, 32), (39, 57), (46, 82); 7) 456; 8) 3 dana, 4 dana; 9) *a*) $x = 863 - 20u$, $y = -1188 + 28u$, $z = 1942 - 45u$; *b*) $x = 120 + 27u$, $y = 103 + 23u$, $z = 165 + 37u$; *c*) $x = 238 + 77v$, $y = 65 + 21v$, $z = 176 + 57v$.

Vježbe za učenike 4. razred gimn. (8. razred 8-god. škole)

Riješi ove jednadžbe:

1. $(2x - 3)^2 - (3x - 2)^2 - 4x^2 = (4x - 5)^2 - (5x - 6)^2 - 16x$.

Izvođenjem naznačenih operacija dobivamo

$$4x^2 - 12x + 9 - 9x^2 + 12x - 4 - 4x^2 = 16x^2 - 40x + 25 - 25x^2 + 60x - 36 - 16x,$$
$$-4x = -16,\ x = 4.$$

$2(x - m)(2x - n)^2 = (x - n)(2x - m)^2$, $(x - m)(4x^2 - 4nx + n^2) = (x - n)(4x^2 - 4mx + m^2)$, $4x^3 - 4mx^2 - 4nx^2 + 4mnx + n^2x - n^2m = 4x^3 - 4nx^2 - 4mx^2 + 4mnx + m^2x - m^2n$, $x(n^2 - m^2) = n^2m - m^2n$,

$$x = \frac{mn(n - m)}{n^2 - m^2} = \frac{mn}{m + n}.$$

3. $$2\,\frac{3x - 8}{5} - \frac{3 - \frac{2(x - 5)}{3}}{8} + \frac{7}{12} = \frac{\frac{4x - 9}{5} - 3}{12} + \frac{4x + 6}{5} + \frac{9}{24}.$$

Množenjem brojnika i nazivnika drugog razlomka s 3, četvrtog s 5 i reduciranjem izlazi

$$\frac{6x - 16}{5} - \frac{19 - 2x}{24} + \frac{7}{12} = \frac{4x - 24}{60} + \frac{4x + 6}{5} + \frac{9}{24}.$$

Ako sad pomnožimo jednadžbu sa $v(5, 24, 12, 60) = 120$, imamo napokon

$$50x = 550,\ x = 11.$$

4. $$\frac{a^2 - x(a - b)}{a} - \frac{b^2 - x(a + b)}{b} = 2x - \frac{a^3 - b^3}{ab}.$$

Množenjem s ab izlazi nakon redukcije

$$x(a - b)^2 = (b - a)(a + b)^2 \quad \text{i}$$
$$x = -\frac{(a + b)^2}{a - b}.$$

5. Ako u dvoznamenkastom broju, gdje je zbroj znamenaka jednak 6, zamijenimo obje znamenke, novi je broj za 6 veći od trostrukog prvog broja. Koji je to broj?

Ako je znamenka jedinica x, znamenka je desetica $6 - x$, a dvoznamenkasti je broj $10(6 - x) + x$; zamjenom znamenaka nastaje broj $10x + 6 - x$; taj je broj za 6 veći od trostrukog prvog broja t. j.

$$10x + 6 - x = 6 + 3[10(6 - x) + x],$$

odakle izlazi $x = 5$, a broj je 15.

6. Avion, koji prevaljuje 480 *km* na sat, treba da preleti ocean širok 6000 *km*; 2 sata kasnije poleti za njim drugi avion; koliko *km* na sat treba da prevaljuje, da oba stignu istodobno?

Kako će prvi avion stići za 12,5 sati, drugi treba da stigne za 10,5 sati. Zato mora biti

$$480 \cdot 12{,}5 = x \cdot 10{,}5$$

i odatle

$$x = \frac{6000}{10{,}5} = \frac{12000}{21} = \frac{4000}{7} = 571\frac{3}{7}\ km/sat.$$

7. Kad će između 7 i 8 sati kazaljka minuta na satu biti za 60° ispred kazaljke sata?

Velika kazaljka prevali za 1 sat kut od 360°, za 1 minutu od 6°, mala kazaljka prevali za sat kut od 30°, za 1 minutu kut od $\left(\frac{1}{2}\right)^\circ$. Kako u 7 sati obje kazaljke čine kut od 210°, mora biti $6x = 210 + \frac{x}{2} + 60$, $x = 49\frac{1}{11}$ minute poslije 7 sati.

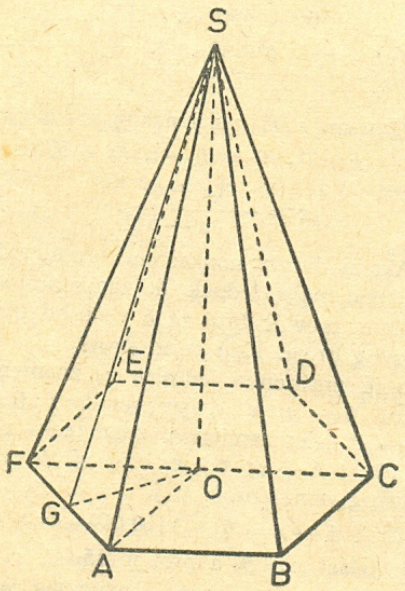
Zadaci iz geometrije

1. U pravilnoj je 6-stranoj piramidi osnovni brid $a = 12\ cm$, pobočni brid $b = 20\ cm$; koliko je oplošje i obujam?

$$O = B + P = \frac{6a^2}{4}\sqrt{3} + 6 \cdot \frac{a}{2}u = \frac{3a}{2}(a\sqrt{3} + 2u),$$

gdje je u pobočna visina;

$$u = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{364} = 2\sqrt{91}.$$



Zato je

$$O = 18(12\sqrt{3} + 4\sqrt{91}) = 72(3\sqrt{3} + \sqrt{91}) = 72 \cdot 14{,}735 = 1060{,}92\ cm^2.$$

$$V = \frac{Bv}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{6a^2}{4}\sqrt{3} \cdot v = \frac{a^2}{2}\sqrt{3} \cdot \sqrt{b^2 - a^2} = 72\sqrt{3} \cdot 16 = 1995{,}264\ cm^3.$$

2. Koliki je obujam pravilne 6-strane piramide, gdje je $a = 32$, pobočna visina $u = 63\ cm^2$.

Visina piramide je

$$v = \sqrt{u^2 - \left(\frac{a}{2}\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{3201};$$

zato je

$$V = \frac{a^2}{2}\sqrt{3}\,v = \frac{32^2}{2}\sqrt{9603} \approx \frac{32^2}{2} \cdot 98 = 50176\ cm^3.$$

3. U pravilnoj 6-stranoj piramidi pobočni brid jednak je 26 *cm*, pobočna visina 24 *cm*; koliko je oplošje i obujam?

$$O = \frac{3a}{2}(a\sqrt{3} + 2u), \qquad \frac{a}{2} = \sqrt{26^2 - 24^2} = 10,$$

$$a = 20\ cm, \quad O = 30(20\sqrt{3} + 48) = 120(5\sqrt{3} + 12) = 120 \cdot 20{,}66 = 2479{,}2\ cm^2.$$

$$V = \frac{a^2}{2}\sqrt{3} \cdot v, \quad v = \sqrt{26^2 - 20^2} = \sqrt{276},$$

$$V = 200 \cdot \sqrt{828} \approx 200 \cdot 28{,}8 = 5760\ cm^3.$$

Укрштене формуле

Овде имамо укрштене формуле или обрасце, по угледу на укрштене речи. Решавање се састоји у томе, што треба сва поља следећег квадрата испунити погодним изразима или бројевима тако, да њихови производи из свих поља једног хоризонталног или усправног реда дају изразе који имају одређено геометриско значење и то:

Хоризонтално: 1) Површина калоте 2) Запремина лопте, 3) Површина омотача равностране купе, 4) Површина омотача праве облице, 5) Запремина облице.

Усправно: 1) Површина лопте, 2) Запремина лоптиног исечка, 3) Запремина облице, 4) Површина омотача равностране облице, 5) Површина омотача праве купе.

	1	2	3	4	5
1					
2					
3					
4					
5					

И број 1 може долазити као фактор.

Matematička križaljka

MILAN KRAJNOVIĆ, Zagreb

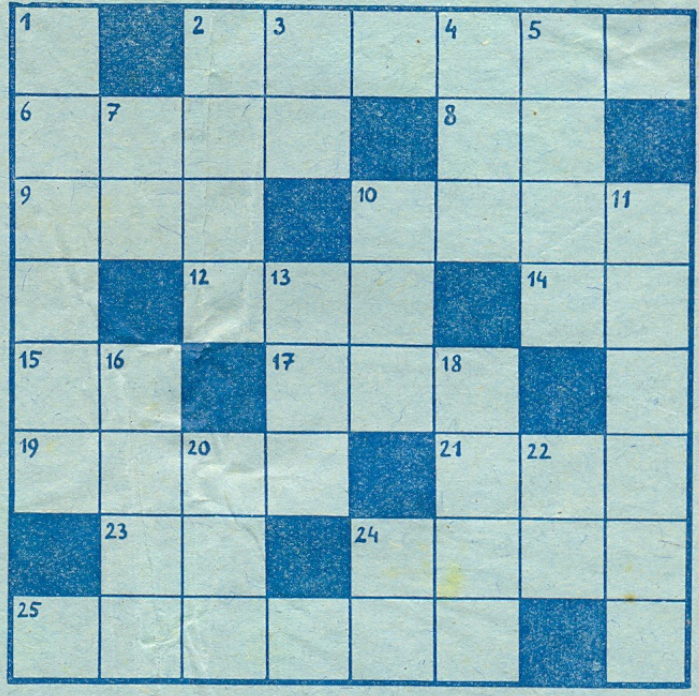
U svako kvadratno polje ne dolazi po jedno slovo, već po jedna arapska cifra!

Vodoravno:

2. Period kvocijenta 2 : 13
6. Volumen kvadratne piramide, kojoj je osnovni brid 15, a visina 95
8. Odrezak pravca $2x - 3y + 174 = 0$ na osi y
9. Najveća zajednička mjera brojeva 1807 i 2502
10. Površina romba s dijagonalama 136 i 62
12. Površina istokračnog trapeza, kojemu su baze 39 i 7, a krak 34
14. Dijagonala pravokutnika sa stranicama 9 i 40
15. Dvocifreni broj, kome je drugi korijen jednak sumi znamenaka
17. Najveći trocifreni broj, djeljiv sa 7
19. Broj sekundi u $1^{0}57'17''$
21. Jedini prim broj između 860 i 870
23. Broj stranica u mnogokutu, kojem je suma unutrašnjih kutova 2160^{0}
24. Površina četverokuta, kojemu su vrhovi A(0,0), B(71,3) C (68,74), D(—3,71)
25. Oplošje kocke s bridom 321

Usp[illegible]no:

1. Volumen kocke s [illegible]idom 83
2. Najmanji zajednički [illegible]šekratnik brojeva 144 i 648
3. LV
4. Broj, od koga 3,5% iznosi 2[illegible]82
5. Prve 4 decimale broja $\sqrt[3]{90}$
7. Broj simetralnih ravnina pravilne 12-erostrane prizme
10. Rješenje jednadžbe $(x + 9) : (x - 9) = 1{,}045$



11. Prvih šest decimala broja $\sqrt{0{,}3786}$
13. Najveći trocifreni prim broj
16. Jedanaest u diadskom brojnom sistemu
18. Oplošje kvadratne prizme bridova 9 i 129
20. 29 tuceta
22. Prostorna dijagonala kvadra s dimenzijama 15, 36 i 52
24. Broj dijagonala u 12-erokutu

KUPON ZA MATEM. KRIŽALJKU

Ime i prezime: .....

.....

Razred i škola: .....

Mjesto: .....

Rješenje (uz prilog ispunjenog kupona) poslati do 30. IV. 1956. Na kuverti naznačiti: »Mat. križaljka«. Između učenika, koji ispravno riješe križaljku, žrijebom će se izvući njih 5 i nagraditi matematičkim knjigama. Rješenje križaljke i imena nagrađenih objavit će se u narednom broju.

Rješenja, dopise i članke slati na Uredništvo »**Matem.-fiz. lista**«, **Zagreb, Ilica 16/III., pošt. pretinac 165.**

Svim suradnicima!

Molimo sve suradnike, da crteže uz članke izrađuju uredno, pregledno i točno, po mogućnosti tušem na posebnom papiru.

Rješavateljima zadataka

U rješenjima treba uvijek napisati i sam zadatak s rednim brojem, ne pozivajući se na broj i datum »Mat.-fiz. lista«, u kome je bio postavljen. Svako rješenje zadataka pisati na posebnom papiru i to samo na jednoj strani papira. — Svako rješenje treba čitljivo potpisati (ime i prezime), naznačujući razred, gimnaziju i mjesto.

Umoljavaju se rješavatelji, da samostalno rješavaju zadatke ne tražeći pomoći od nastavnika, a niti od koga drugoga. Umoljavaju se također rješavatelji, da propisno frankiraju listove, koje šalju našoj redakciji.

DRUŠTVO MATEMATIČARA I FIZIČARA NR HRVATSKE IZDAJE ČASOPIS

GLASNIK
MATEMATIČKO-FIZIČKI I ASTRONOMSKI

Pretplata za 1956. godinu iznosi Din 480 i šalje se na administraciju GLASNIKA: **Hrvatsko prirodoslovno društvo — Zagreb, Ilica 16/III.**

Čekovni račun 406-T-767 za Društvo matematičara i fizičara NRH

Godišnja članarina za društvo je Din 240. — Članovi primaju Glasnik uz nadoplatu Din 240

OBAVIJEST PRETPLATNICIMA I POVJERENICIMA

Kako naš list mora da namiri ogromne troškove oko štampanja i izlaženja, umoljavaju se svi pretplatnici-dužnici, da u najkraćem roku pošalju dužnu pretplatu. Neka nikako ne čekaju posebne opomene, jer je svako opominjanje skupo.